

Jornadas de Automática

Implementación en tiempo discreto del predictor de Smith sobre el espacio de estados

Martínez, Jorge Luis^{a,*}, Morales, Jesús^a

^aDpto. de Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Málaga,
Calle Dr. Ortiz Ramos s/n, 29071, Málaga, España.

To cite this article: Martínez, J. L., Morales, J. 2025. Discrete-time implementation of Smith's predictor on the state space. *Jornadas de Automática*, 46. <https://doi.org/10.17979/ja-cea.2025.46.12140>

Resumen

En este artículo se plantea cómo aplicar el predictor de Smith solo con variables de estado, centrándose en su implementación de tiempo discreto para obtener el mismo comportamiento del predictor convencional basado en la representación externa del proceso. Su desempeño se analiza mediante simulaciones sobre un sistema de una entrada-una salida con retardo de transporte y control proporcional-integral frente a perturbaciones. Además, se compara con la alternativa de modelar directamente el retardo temporal con una cadena de variables de estado.

Palabras clave: Sistemas con retardos de transporte, Sistemas lineales, Control de procesos, Rechazo de perturbaciones, Regulación, Implementación digital, Control predictivo.

Discrete-time implementation of Smith's predictor on the state space

Abstract

In this paper it is considered how to apply the Smith's predictor only with state variables, focusing on its discrete-time implementation in order to obtain the same behavior of the conventional predictor based on the external representation of the process. Its performance is analyzed through simulations on a single input-single output system with transport delay and proportional-integral control against disturbances. In addition, it is compared with the alternative of directly modeling the time-delay with a chain of state variables.

Keywords: Systems with time-delays, Linear systems, Process control, Disturbance rejection, Regulation, Digital implementation, Predictive control.

1. Introducción

Los retardos de transporte o tiempos muertos se presentan en numerosos procesos industriales cuando existe una demora en la aplicación de una actuación o en la recepción de una medida. La falta de consideración de los mismos puede producir importantes desajustes en los controladores diseñados e, incluso, provocar la desestabilización del sistema.

El predictor de Smith (PS) es una clase de control predictivo especialmente diseñado para plantas industriales con retardos significativos en el bucle de control (Smith, 1957). Básicamente, el proceso se controla prediciendo la salida sin

demoras y cancelando la salida retardada, todo ello basado en el modelo del sistema. De esta forma, la respuesta se va a parecer a la de la planta sin retardo, aunque estará inevitablemente retrasada.

Los principales inconvenientes del PS son que solo se puede aplicar a procesos que sean asintóticamente estables en bucle abierto y que únicamente es capaz de rechazar perturbaciones constantes (Guzmán et al., 2008). Para solucionar estos problemas se han propuesto diferentes enfoques tales como predictores filtrados (Normey-Rico and Camacho, 2009), generalizados (Sanz et al., 2018) y con rechazo activo de perturbaciones (Zhang et al., 2020). En el caso de perturbacio-

*Autor para correspondencia: jorgelmartinez@uma.es
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

nes medibles, se pueden plantear esquemas de prealimentación para compensarlas (Pereira et al., 2023).

En (Ono et al., 2010) y en (Salcedo et al., 2021) se combinan, sin llegar a integrarlos, un PS para ajuste proporcional-integral (PI) junto con la realimentación lineal del vector de estado. Por su parte, (Molnar et al., 2019) contiene diagramas de bloques con variables de estado para implementar distintas versiones del PS.

Sin embargo, en libros de control, tanto en español como en inglés, el PS se presenta en base a funciones de transferencia, es decir, con la representación externa de la planta. En el presente artículo se plantea el PS exclusivamente desde la perspectiva de la ingeniería de control moderna para poder incluirlo en el libro de control aplicado con variables de estado (Martínez and Morales, 2016).

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma. A continuación, se repasa el PS y se presentan esquemas para el mismo con representación interna. En la siguiente sección se estudia con simulaciones un proceso con retardo controlado mediante un PS y un PI. Finalmente, se incluyen algunas conclusiones del trabajo realizado.

2. El predictor de Smith

El predictor de Smith con representación externa (PSe) para tiempo discreto se puede observar en la Figura 1 suponiendo un retardo conocido $\lambda = dT$, donde T es el periodo de muestreo y d el número entero de intervalos que forman λ . Asimismo, $G(z)$ es la función de transferencia directa del proceso, $H(z)$ la función de transferencia de la medida de la salida y $G_c(z)$ el controlador diseñado para el proceso sin ningún atraso.

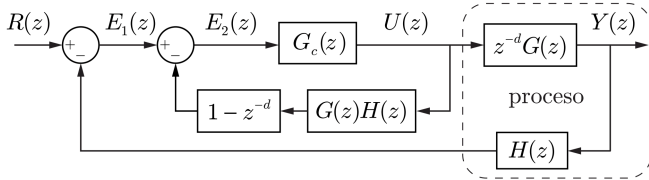


Figura 1: Esquema del PS con descripción externa de tiempo discreto.

El bucle interno con error e_2 en la Figura 1 predice la medida sin demora con la que se va a controlar el proceso y compensa la salida retrasada del lazo externo con error e_1 . Con un modelo exacto, la respuesta del PSe va a ser la misma que la del sistema sin retardo realimentado con $G_c(z)$, salvo que va estar retrasada d pasos:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)H(z)} z^{-d}. \quad (1)$$

2.1. Descripción interna

La Figura 2 presenta una versión del predictor de Smith exclusivamente con descripción interna (PSi) de tiempo discreto con $t = kT$, donde k es el número entero de periodos desde el instante inicial ($t = 0$). Tanto el observador como el vector de ganancias K para la realimentación lineal del vector de estado se diseñan para el proceso sin retardo, es decir, sin estados adicionales que representen la demora.

En la Figura 2 se usan las matrices dinámica A , de control B y de salida C del modelo sin retardo para poder predecir el estado $x_m(k)$ y la salida $y_m(k)$ del proceso sin atraso:

$$x_m(k+1) = A x_m(k) + B u(k), \quad y_m(k) = C x_m(k). \quad (2)$$

Estas matrices también se emplean para el observador de las variables de estado retrasadas:

$$\hat{x}(k+1) = A \hat{x}(k) + B u(k-d) + L(y(k) - C \hat{x}(k)), \quad (3)$$

donde L es el vector de ganancias del observador completo.

Para calcular la actuación se emplea un vector K de tantas ganancias como número de estados:

$$u(k) = -K(\hat{x}(k) - x_m(k-d) + x_m(k)) + r(k), \quad (4)$$

donde se asume que el estado estimado con atraso $\hat{x}(k)$ se va a cancelar con $x_m(k-d)$. También se puede observar que se introducen retrasos (z^{-d}) tanto para obtener $u(k-d)$ a la entrada del observador como para conseguir $x_m(k-d)$, lo que, a efectos prácticos, significa emplear valores previamente registrados.

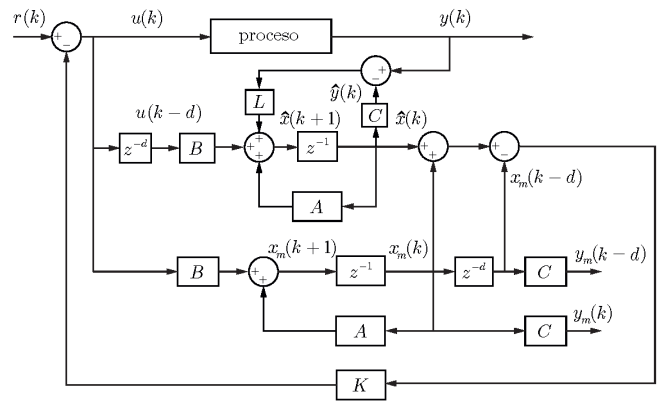


Figura 2: Esquema del predictor de Smith con representación interna y observador para las variables de estado.

Si todo el vector de estado fuese medible, no sería necesario emplear un observador y en (4) podría utilizarse directamente $x(k)$ en lugar de $\hat{x}(k)$ (ver Figura 3).

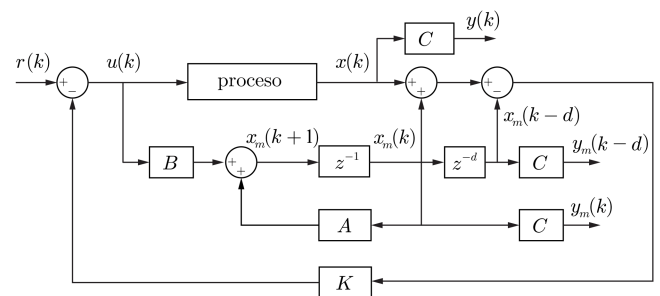


Figura 3: Esquema del predictor de Smith con representación interna y variables de estado medibles.

3. Caso de estudio

Se estudia mediante simulación el Ejemplo 5.11 del libro (Åström and Wittenmark, 1997) en el que se parte del siguiente sistema de una entrada-una salida con un retardo $d = 2$ y periodo $T = 1$ s:

$$y(k+1) = 0,37y(k) + 0,63u(k-2), \quad (5)$$

que se controla mediante un regulador PI que realimenta directamente la salida retrasada con ganancia proporcional $g = 0,1$ y tiempo integral $T_i = 0,5$:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = g \frac{\left(1 + \frac{T}{T_i}\right)z - 1}{z - 1}. \quad (6)$$

Además, se introduce un PSe con $g = 0,4$ y $T_i = 0,4$ para el control PI, donde empleando el esquema de la Figura 1 se tiene que:

$$G(z) = \frac{0,63}{z - 0,37}, \quad H(z) = 1, \quad G_c(z) = \frac{1,4z - 0,4}{z - 1}, \quad (7)$$

por lo que la función de transferencia entre la salida y la referencia sería:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,882z - 0,252}{z^2 - 0,488z + 0,118} z^{-2}, \quad (8)$$

con un cero en $c = 0,2857$, un par de polos nulos y otro par de polos complejos conjugados en $p = 0,244 \pm 0,2418j$.

En la Figura 4 aparecen representadas las salidas y las actuaciones de ambos controladores con condiciones iniciales nulas ante un escalón unitario en r . Asimismo, a partir del instante $k = 20$ se añade una perturbación a u de 0,5. Como se puede observar, con el PSe se obtiene una respuesta bastante más rápida que con el regulador convencional. Además, la actuación es inmediata respecto del escalón en $k = 0$, pero no reaccionan hasta el instante $k = 23$ ante la perturbación, ya que solo la pueden percibir a través de la salida retrasada.

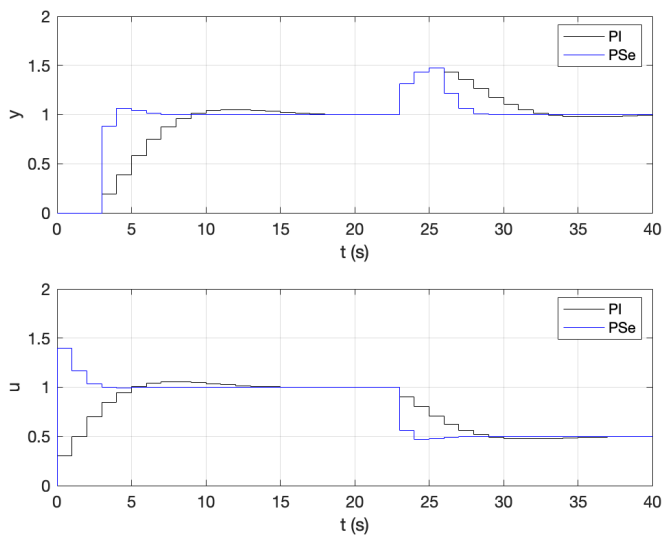


Figura 4: Respuesta ante un escalón unitario y ante una perturbación a la entrada con un PI convencional y un PSe (Åström and Wittenmark, 1997).

3.1. Predictor de Smith en el espacio de estados

Como primera variable de estado se puede escoger $x_1 = y$. Además, es necesario incorporar una segunda variable de estado para integrar los errores entre la salida deseada y_d y la medida y (Martínez and Morales, 2016):

$$v(k+1) = v(k) + y_d(k) - y(k), \quad (9)$$

donde es importante que y_d e y estén sincronizadas, es decir, que se retrasen a la vez para calcular v , pero no para obtener v_m en el modelo sin atraso (2).

La primera variable es medible y , con ella, se calcula la segunda ($x_2 = v$), pudiéndose, así, aplicar el esquema para PSi de la Figura 3. De esta forma, las matrices dinámica, de control y de salida para el modelo sin demora serían:

$$A = \begin{pmatrix} 0,37 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,63 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Si se desean los mismos polos no nulos que en (8), aplicando las fórmula de Ackermann (Ollero, 1991), el vector de ganancias valdría:

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Además, si se quiere situar el cero c igual que en (8), la señal de referencia se puede escoger en función de y_d (Martínez and Morales, 2016) como:

$$r = \frac{K_2}{c - 1} y_d = 1,4y_d. \quad (12)$$

Como alternativa al PSi, se puede modelar el retardo añadiendo dos nuevas variables de estado encadenadas (Martínez and Morales, 2016):

$$x_2(k) = u(k-2), \quad x_3(k) = u(k-1). \quad (13)$$

Dejando la variable de integración como cuarta variable de estado: $x_4 = v$, las matrices ampliadas de la descripción interna serían:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0,37 & 0,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si se desean los mismos cuatro polos de (8) para el sistema realimentado, entonces:

$$K_a = \begin{pmatrix} 1,5617 & 0,9563 & 0,8820 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Dado que la ganancia asociada a la variable de integración para K_a es la misma que para K , la señal de referencia para situar c no varía: $r = K_4/(c - 1)y_d = 1,4y_d$.

Así, con el PSi se obtiene exactamente la misma respuesta que con el PSe al aplicar un escalón unitario en y_d junto a la perturbación en u de 0,5 a partir de $k = 20$ (ver Figura 5). Lo mismo ocurre para el controlador con K_a ante el escalón con condiciones iniciales nulas. Solo se aprecian diferencias poco significativas entre ambos respecto de la perturbación.

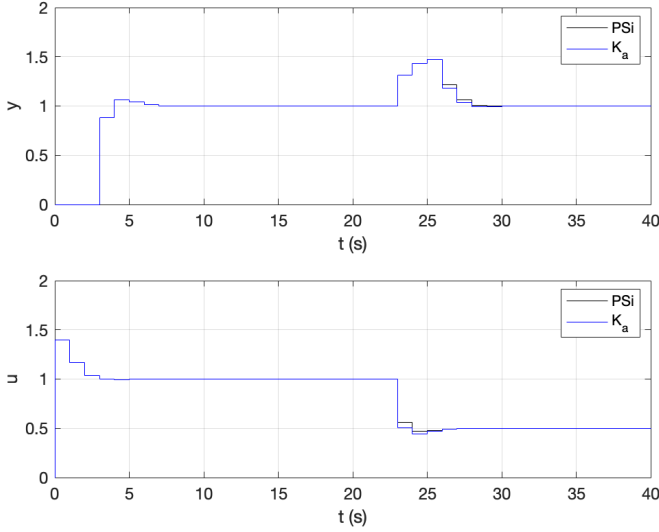


Figura 5: Respuesta del sistema ante un escalón unitario y ante una perturbación a la entrada con un PSi y con realimentación lineal del vector de estado ampliado.

3.2. Control de mínimo número de pasos

En lugar de emplear las especificaciones PI, se puede optar por el control óptimo para tiempo discreto de mínimo número de intervalos (Ollero, 1991). Para ello, manteniendo la variable de integración, en el PSi se asignarían dos polos nulos y cuatro polos nulos con la cadena de retardos, dando lugar a los siguientes vectores:

$$K = \begin{pmatrix} 2,1746 & -1,5873 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$K_a = \begin{pmatrix} 2,4723 & 1,5069 & 1,37 & -1,5873 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

con ganancias mayores en valor absoluto que las obtenidas con anterioridad en ambos casos (11)(15). Además, se puede escoger $r = 0$ para no introducir ningún cero en lazo cerrado (Martínez and Morales, 2016).

En la Figura 6 se observa que las respuestas de ambos controladores son más rápidas (justo en cuatro pasos ante el escalón) respecto de la anterior imitación del PI, a costa de un mayor esfuerzo de control. Sin embargo, la actuación deja de ser nula a partir de $k = 1$, en lugar $k = 0$ como ocurría con las especificaciones del PI debido a la ausencia de ceros en la función de transferencia con ganancia estática unitaria:

$$\frac{Y(z)}{Y_d(z)} = \frac{1}{z^4}, \quad (18)$$

la cual es común para ambos controladores en el espacio de estados.

Ante la perturbación en la entrada, la realimentación lineal del vector de estado ampliado con K_a responde más rápido que el PSi con K (ver Figura 6). Sin embargo, cuando se introduce en el diseño de estos dos controladores un modelo inexacto para la planta:

$$y_m(k+1) = 0,4 y_m(k) + 0,6 u(k-2), \quad (19)$$

se observa en la Figura 7 que la anterior ventaja se diluye, obteniendo respuestas muy similares en ambos casos.

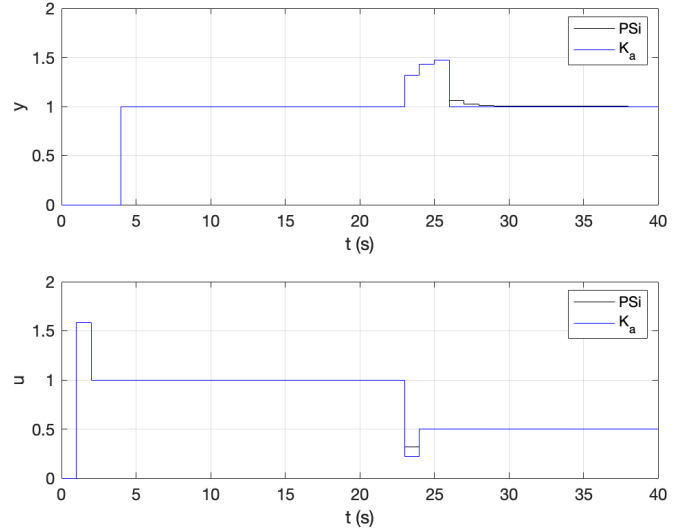


Figura 6: Control de mínimo número de pasos sin errores de modelado de la planta.

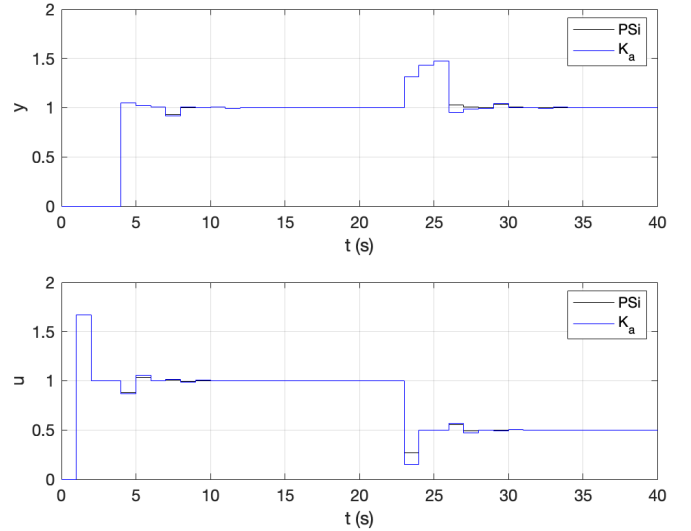


Figura 7: Control de mínimo número de pasos con errores de modelado de la planta.

4. Conclusiones

Este artículo está inspirado en la conferencia plenaria impartida por el Prof. Pedro Albertos en la Jornadas de Automática de 2024 titulada "Diseño del control de sistemas con múltiples retardos de tiempo", a partir de la cual los autores se plantearon cómo se podría implementar el predictor de Smith en el espacio de estados para incluir esta técnica de control en la siguiente edición del libro (Martínez and Morales, 2016).

Así, se han planteado dos esquemas de tiempo discreto para el predictor de Smith con representación interna en función de que las variables de estado sean medibles o que se requiera emplear un observador para obtener las mismas.

Se ha analizado su funcionamiento mediante simulaciones sobre una planta de una entrada-una salida con control proporcional-integral ante perturbaciones, obteniéndose los

mismos resultados que con el predictor de Smith convencional.

Respecto a la alternativa de modelar directamente el retardo con una cadena de variables de estado, aunque ambos tienen un desempeño parecido, el predictor de Smith resulta más sencillo de implementar, ya que el vector de ganancias para realimentar el vector de estado no aumenta con el retardo ni requiere añadir polos adicionales para su diseño. Por el contrario, la realimentación del vector de estado ampliado no está limitada a procesos asintóticamente estables.

Como trabajo futuro cabe plantearse cómo afecta una incorrecta estimación del retardo, que en este artículo se ha considerado bien conocido y múltiplo entero del periodo de muestreo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en parte gracias al Proyecto de Investigación de Excelencia de la Junta de Andalucía PRE-MOVE (ProyExcel 00684).

Referencias

- Åström, K. J., Wittenmark, B., 1997. Computer-controlled systems. Theory and design. Prentice Hall, Tercera edición.
- Guzmán, J. L., García, P., Häggglund, T., Dormido, S., Albertos, P., Berenguel, M., 2008. Interactive tool for analysis of time-delay systems with dead-time compensators. *Control Engineering Practice* 16 (7), 824–835. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2007.09.002>
- Martínez, J. L., Morales, J., 2016. Control aplicado con variables de estado. Paraninfo, Segunda edición.
- Molnar, T. G., Hajdu, D., Insperger, T., 2019. The Smith predictor, the modified Smith predictor, and the finite spectrum assignment: A comparative study. In: Gao, Q., Karimi, H. R. (Eds.), *Stability, Control and Application of Time-delay Systems*. Butterworth-Heinemann, Ch. 10, pp. 209–226. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814928-7.00010-X>
- Normey-Rico, J. E., Camacho, E. F., 2009. Unified approach for robust dead-time compensator design. *Journal of Process Control* 19 (1), 38–47. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2008.02.003>
- Ollero, A., 1991. Control por Computador. Descripción interna y diseño óptimo. Marcombo Boixareu.
- Ono, M., Shibasaki, H., Matsumoto, K., Sasaki, K., Ishida, Y., 2010. Discrete modified smith predictor based on optimal control method for a plant with an integrator. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. Istanbul, Turkey, pp. 630–635. DOI: 10.1109/ICSMC.2010.5641821
- Pereira, R. D., Torrico, B. C., do Nascimento, J. N., Alves Lima, T., de Almeida Filho, M. P., Nogueira, F. G., 2023. Smith predictor-based feedforward controller for measurable disturbances. *Control Engineering Practice* 133, 105439. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2023.105439>
- Salcedo, J., Feliu, V., Rivas, R., 2021. State feedback temperature control based on a Smith predictor in a precalciner of a cement kiln. *IEEE Latin America Transactions* 19 (01), 138–146. DOI: 10.1109/TLA.2021.9423857
- Sanz, R., García, P., Albertos, P., 2018. A generalized Smith predictor for unstable time-delay SISO systems. *ISA Transactions* 72, 197–204. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.09.020>
- Smith, O. J. M., 1957. Closed control of loops with dead-time. *Chemical Engineering Progress* 53, 217–219.
- Zhang, B., Tan, W., Li, J., 2020. Tuning of Smith predictor based generalized ADRC for time-delayed processes via IMC. *ISA Transactions* 99, 159–166. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2019.11.002>