

# Jornadas de Automática

## Sistemas híbridos estocásticos en el análisis de sistemas cuánticos: el experimento de Haroche

Molina, Aitor<sup>a,\*</sup>, Mulero, Juan Ignacio<sup>b</sup>, Baños, Alfonso<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Dpto. de Informática y Sistemas, Universidad de Murcia, 30100, Murcia, España.

<sup>b</sup>Dpto. de Automática, Ingeniería Eléctrica y Tecnología Electrónica, Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, España.

**To cite this article:** Molina, Aitor, Mulero, Juan Ignacio, Baños, Alfonso. 2025. Stochastic hybrid systems in the analysis of quantum systems: the Haroche experiment. Jornadas de Automática, 46.  
<https://doi.org/10.17979/ja-cea.2025.46.12206>

### Resumen

Los sistemas híbridos deterministas y estocásticos permiten modelar dinámicas que combinan evolución continua y saltos discretos, como ocurre en los sistemas cuánticos abiertos. En este trabajo se propone una formalización híbrida del experimento de Haroche, donde una cavidad cuántica con fotones interactúa con qubits que son inyectados y medidos de forma periódica. El modelo captura la dinámica de la cavidad mediante ecuaciones maestras de Lindblad, y los saltos asociados a las decisiones de inyección y medición a través de operadores cuánticos. A partir de una herramienta de simulación diseñada en MATLAB/Simulink, se estudia el sistema desde el punto de vista entrada-salida, introduciendo señales clásicas en teoría de control y se estudia la influencia en la salida del mismo. Finalmente, se estudia la estimación del número medio de fotones en el sistema a través de interacción con qubits. El estudio permite explorar propiedades como la estabilidad, la sensibilidad a la excitación y la controlabilidad de sistemas cuánticos.

**Palabras clave:** Sistemas híbridos estocásticos, Control de sistemas cuánticos, Sistemas entrada-salida, Teoría de control, Estabilidad.

### Stochastic hybrid systems in the analysis of quantum systems: the Haroche experiment

### Abstract

Deterministic and stochastic hybrid systems allow for modeling dynamics that combine continuous evolution with discrete jumps, as is the case of open quantum systems. This work proposes a hybrid formalization of the Haroche experiment, where a photon-field quantum cavity interacts with qubits that are periodically injected and measured. The model captures the cavity's dynamics through Lindblad master equations, and the jumps associated with injection and measurement decisions via quantum operators. Using a simulation tool developed in MATLAB/Simulink, the system is studied from an input-output perspective, applying classical signals in control theory. Finally, an approach to estimate the number of photons in the cavity via qubit interaction is studied. This study enables the exploration of key properties such as stability, excitation sensitivity, and controllability in quantum systems.

**Keywords:** Stochastic hybrid systems, Quantum systems control, Input-output systems, Control Theory, Stability.

### 1. Introducción

En las últimas décadas, el estudio y el *control de sistemas cuánticos* ha adquirido una relevancia creciente debido al avance de tecnologías asociadas a la *segunda revolución*

cuántica (Weidner et al., 2025). Estos sistemas, por su naturaleza, combinan evolución continua determinista (regida por ecuaciones maestras de Lindblad) con saltos discretos y estocásticos asociados a medidas o interacciones externas. Esta

\* Autor para correspondencia: aitor.molinat@um.es  
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

doble dinámica puede estudiarse de manera natural a través de la *teoría de sistemas híbridos deterministas y estocásticos*. En este contexto, los avances recientes en experimentos con cavidades cuánticas, como en los *trabajos de Haroche* (Haroche et al., 2013), ofrecen un escenario ideal para validar estos enfoques (Figura 1). El estudio de este tipo de sistemas no solo permite entender mejor su comportamiento dinámico, sino también diseñar estrategias de control que puedan regular magnitudes como el *número medio de fotones*, con aplicaciones directas en tecnologías emergentes como la computación cuántica.

En este trabajo, se propone un enfoque que combina el análisis y la simulación, a través de una formalización del experimento desde el marco de sistemas híbridos empleando el formalismo de *inclusiones híbridas* (Goebel et al., 2012). Además, se estudiará el efecto de varias señales de entrada sobre el número medio de fotones que se mantienen en la cavidad, utilizando los modelos híbridos obtenidos, y también la estimación del número medio de fotones en la cavidad partiendo de su interacción con un conjunto de qubits.

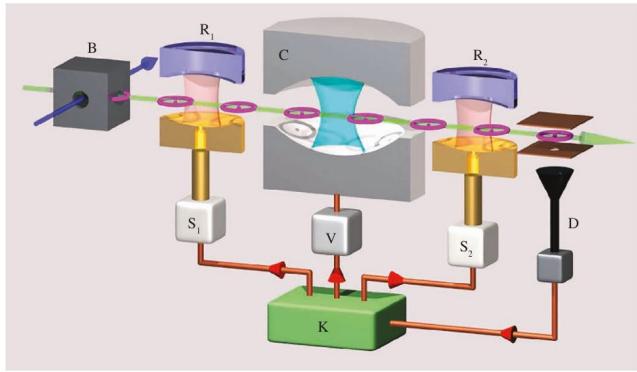


Figura 1: Experimento de Haroche.  $B$  es una cavidad aislada desde la que se lanzan qubits,  $R_1$  y  $R_2$  son interferómetros de Ramsey, que efectúan rotaciones sobre el estado del sistema.  $C$  es una cavidad superconductora que contiene fotones resonando.  $D$  es un detector,  $K$  es el controlador, y  $S_1$ ,  $S_2$  y  $V$  son las variables sobre las que puede tomar acción  $K$ . (Haroche et al., 2013).

## 2. Preliminares

Desde la formulación moderna de la teoría de sistemas híbridos, se han desarrollado diversos marcos matemáticos para su modelado, análisis y control. Uno de los más relevantes es el formalismo de *inclusiones híbridas* (Goebel et al., 2012).

### 2.1. Sistemas híbridos deterministas

Un sistema híbrido determinista  $\mathcal{H}$  viene representado formalmente por:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} \dot{x} \in F(x), & x \in C \\ x^+ \in G(x), & x \in D \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado del sistema, y donde se usa el convenio de Newton para la derivada  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .  $C \subset \mathbb{R}^n$  y

$D \subset \mathbb{R}^n$  son los *conjuntos de flujo* y *salto*, respectivamente. Estos conjuntos son donde las dinámicas continua (de flujo) y discreta (de salto) tienen lugar.  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  es el llamado *mapa de flujo*, que es, en general, una función multivaluada. En este contexto, es posible simplificar la dinámica utilizando una ecuación diferencial que rige la evolución continua del estado ( $\dot{x} = f(x)$  con  $f \in F(x)$ ), mientras que  $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  es el *mapa de salto*, que dicta cómo ocurre la evolución de salto (ecuación en diferencias si no se utiliza la inclusión  $x^+ = g(x)$  con  $g \in G(x)$ ). En el presente trabajo, se utiliza íntegramente el modelado de ecuaciones diferenciales (sin inclusiones), entendiéndose a  $f$  y  $g$  como mapas de flujo y salto, respectivamente. Un sistema híbrido construido a partir de los datos previos se suele representar de manera breve con la notación  $\mathcal{H} = (C, F, D, G)$ , sin inclusiones  $\mathcal{H} = (C, f, D, g)$ , o simplemente,  $\mathcal{H}$ .

### 2.2. Sistemas híbridos estocásticos

La clase de sistemas híbridos estocásticos desarrollada en (Teel, 2013) se utilizará aquí. La base para el entendimiento de los mismos se expone esencialmente en (Goebel et al., 2012), la cual debe revisarse dada la importancia de conocer el concepto de solución. En concreto, se consideran sistemas híbridos estocásticos con estado  $x \in \mathbb{R}^n$  y señal de entrada aleatoria  $v \in \mathbb{R}^m$ , y con los siguientes datos en  $\mathbb{R}^n$ : i) el *conjunto de flujo*  $C \subset \mathbb{R}^n$ , ii) el *mapa de flujo*  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ , iii) el *conjunto de salto*  $D \subset \mathbb{R}^n$ , iv) el *mapa de salto*  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ , y v) la función de distribución <sup>1</sup>  $\mu$ . Un sistema híbrido con estos datos es representado como  $(C, F, D, G, \mu)$  y viene dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(x), & x \in C, \\ x^+ \in G(x, v), & x \in D \\ v \sim \mu(\cdot) \end{cases} \quad (2)$$

$S_{\mathcal{H}}(\xi)$  es el conjunto de soluciones maximales  $\phi$  al sistema híbrido  $\mathcal{H}$  con  $\phi(0, 0) = \xi$ . Para  $\mathcal{H}$ , las denominadas *condiciones híbridas básicas* y *condición básica híbrida estocástica* definida en (Teel, 2013) (ver también Teel et al. (2014)) se verifican si: 1)  $C$  y  $D$  son subconjuntos cerrados de  $\mathbb{R}^n$ , 2) El *mapa multivaluado*  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  es semicontinuo exterior, localmente acotado, y para cada  $x \in C$ ,  $F(x)$  es no vacío y convexo, y 3) El mapa multivaluado  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  es localmente acotado, y para cada  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto G(x, v)$  es semicontinuo exterior, y el mapa <sup>2</sup>  $v \mapsto \text{graph}(G(\cdot, v))$  es medible.

Estas condiciones básicas garantizan la existencia de soluciones aleatorias en dominios de tiempo no triviales bajo condiciones de suavidad. Las soluciones aleatorias a (2) son funciones  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tales que para cada  $\omega \in \Omega$ , el camino  $\phi_\omega = x(\omega)$  es una solución estándar de acuerdo al concepto de solución dado en (Goebel et al., 2012), y que se basa en el concepto de arco híbrido. Por simplicidad,  $\phi$  será usado en lugar de  $\phi_\omega$  pues es claro dentro del contexto. El lector es referenciado a (Goebel et al., 2012) y (Teel, 2013) para definiciones más precisas de arco híbrido y solución aleatoria. Una solución aleatoria  $x$  es maximal si para cada camino  $\phi$  su dominio

<sup>1</sup>  $\mu$  se deriva de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (ver (Teel, 2013) para detalles técnicos).

<sup>2</sup>  $\text{graph}(G(\cdot, v)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : y \in G(x, v)\}$

no admite más extensión de la que tiene. Y  $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(\xi)$  es el conjunto de soluciones aleatorias maximales  $\mathbf{x}$  al sistema híbrido  $\mathcal{H}$  con caminos  $\phi_{\omega}(0, 0) = \xi$  para cualquier  $\omega \in \Omega$ . Las condiciones básicas garantizan también la equivalencia entre las propiedades de estabilidad y recurrencia (Teel, 2013).

### 2.3. Sistemas cuánticos abiertos

Los *Sistemas Cuánticos Abiertos* son sistemas de naturaleza cuántica que interactúan con su entorno. La *Mecánica Cuántica* surge a principios del siglo pasado debido a la observación de problemas relacionados con la emisión y absorción de luz por la materia. Fue entonces en décadas posteriores que se consiguió un formalismo consistente que matematizaba y axiomatizaba todas las ideas, conformando los conocidos *Postulados de la Mecánica Cuántica* (Cohen-Tannoudji et al., 1977). En ellos se establece que el estado de un sistema cuántico viene dado por un vector  $|\psi\rangle$  de un *espacio de Hilbert*  $\mathbb{H}$ , cuya evolución temporal es gobernada por la *ecuación de Schrödinger*  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria,  $\hbar$  la constante de Planck, y  $\hat{H}$  es el *operador hamiltoniano*, el observable físico asociado a la energía del sistema. Además, también se especifica en ellos que la acción de un operador sobre el sistema genera un colapso (salto) en su estado con una cierta probabilidad asociada. En ese sentido, el carácter natural de un sistema cuántico es híbrido y estocástico. Una definición que se utiliza más adelante es la de qubit:

Sean  $|0\rangle, |1\rangle \in \mathbb{H}$  espacio de Hilbert estados que representan un sistema cuántico con dos posibles resultados en el proceso de medida. Esto es un llamado *sistema cuántico de dos niveles*. Formalmente, para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , se define el estado del sistema como  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , lo que es informalmente llamado un *qubit*.

Otra situación de especial interés se da cuando se tiene un colectivo formado por múltiples sistemas idénticos, por ejemplo un conjunto de  $N$  fotones que pueden estar en diferentes estados. En este caso, se define el estado del *ensemble* a partir del operador o *matriz de densidad*  $\hat{\rho} = \sum_n^N \omega_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$ , siendo  $|\psi_n\rangle$  el estado del  $n$ -ésimo fotón. La matriz de densidad debe cumplir ciertas restricciones, por ejemplo debe tener traza unidad y ser hermítica, para ser válida (D'Alessandro, 2022). La evolución dinámica del colectivo viene dada por la ecuación maestra de Lindblad, que describe la dinámica de un sistema cuántico de esas características abierto al entorno (Haroche et al., 2013):

$$\dot{\hat{\rho}} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_i (\hat{\mathcal{L}}_i \hat{\rho} \hat{\mathcal{L}}_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{\mathcal{L}}_i^\dagger \hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\rho} \}) \quad (3)$$

donde  $\{a, b\} = ab + ba$  es el anticomutador de dos operadores. Los operadores  $\hat{\mathcal{L}}_i$  son los llamados operadores de Lindblad, definidos como  $\hat{\mathcal{L}}_1 = \sqrt{\kappa(1 + n_{th})} \hat{a}$  y  $\hat{\mathcal{L}}_2 = \sqrt{\kappa n_{th}} \hat{a}^\dagger$ , donde  $\kappa$  y  $n_{th}$  son la constante de disipación y el número térmico de fotones regido por la distribución de Bose-Einstein (Huang, 1987). Este es el número de fotones que el sistema alcanza en el estacionario. Estos parámetros reflejan cómo el sistema va disipando energía con su evolución a medida que interactúa con su entorno.

## 3. Dinámica y modelado del sistema

### 3.1. Descripción del sistema físico

El sistema físico que se estudia en este trabajo está inspirado en el experimento desarrollado por Serge Haroche y colaboradores (Haroche et al. (2013) - véase Figura 1), en el que el objetivo es controlar el número medio de fotones en una cavidad cuántica (esta será la salida de nuestro sistema) mediante la interacción con átomos de Rydberg (qubits). Aunque en la literatura se haya estudiado desde el punto de vista continuo, este sistema se presta naturalmente a ser modelado como un sistema híbrido, ya que combina evolución continua (la dinámica de la cavidad y los qubits a través de los hamiltonianos correspondientes) con eventos discretos (inyección y medida de qubits), y presenta además interacciones estocásticas derivadas del proceso de medida.

Los elementos principales que conforman el sistema son:

1. *Cavidad superconductora (C)*. Es el elemento central del modelo, en ella existe un campo de fotones resintonando a una frecuencia dada  $\omega$ . Aquí es donde ocurre la mayor parte de la dinámica del sistema, que al ser abierto al entorno, vendrá descrita por una ecuación tipo Lindblad y hamiltonianos que describen distintas interacciones en su interior. La salida del bloque se corresponde con magnitudes medibles que son objeto de control (número medio de fotones, pureza, poblaciones de Fock).
2. *Función de drive  $f(t)$* . Se trata de una entrada externa controlable. Representa un campo electromagnético variable en el tiempo que se inyecta en la cavidad con el fin de alterar el número medio de fotones en la misma a través de un modelo de interacción tipo drive. Este drive puede considerarse una entrada clásica de control que permite modificar la dinámica interna del sistema cuántico. En el esquema de la Figura 1, se trata del elemento  $V$ .
3. *Lanzadera de qubits basada en una decisión  $u(t)$* . Representa el bloque mixto  $B + R_1$  (ver Figura 1). Se encarga de arrojar qubits a la cavidad con cierta periodicidad. El estado del qubit que se lanza se hace en base a una decisión (política de control basada en una ley de entrada) determinada por una función auxiliar  $u(t)$ . Físicamente, representa una operación mediante pulsos microondas que excitan o no el qubit, dependiendo del valor de  $u(t)$ .
4. *Bloque de medida. Rotación y proyección*. El bloque de medida se encarga de aplicar una rotación (cavidad de Ramsey  $R_2$ ) al estado del qubit tras la interacción con la cavidad. Después de la rotación, se aplica sobre el estado resultante una medida proyectiva en  $D$  para obtener información del interior de la cavidad. Es aquí donde reside el carácter estocástico del sistema dada la aleatoriedad de la medida.

Desde el punto de vista entrada-salida, el sistema es claramente un MISO (*Multiple Input Single Output*), véase por ejemplo (Sáez et al., 2025), dado que consta de 2 señales de entrada,  $u$  y  $f$ , mientras que la salida es el número medio de fotones  $\langle n \rangle$ . Otra perspectiva sugiere para el sistema un esquema tipo control en cascada con realimentación.

### 3.2. Formalismo híbrido

El primer paso natural es definir el estado que describe al sistema en cada instante durante su evolución. Con ello, sea  $N$  el *número máximo de fotones* en la cavidad. Sea  $T_{sim}$  el tiempo de duración total del experimento, durante el cuál se arrojará un número determinado de qubits a la cavidad, sea este  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Se lanzará un qubit a cada instante de tiempo  $T_q$ , cada uno de los cuales interactuará con los fotones de la cavidad (y el entorno) durante un tiempo de interacción  $T_i < T_q$ . El esquema se muestra en la Figura 2.

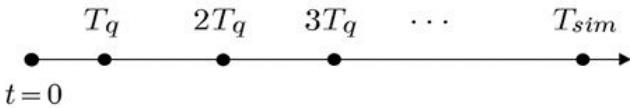


Figura 2: Línea de tiempo del experimento. Se toma como instante inicial  $t = 0$ , y se lanza un qubit en  $t = KT_q$  con  $K = 1, 2, 3, \dots, m$ . La línea de tiempo queda dividida en ventanas de duración  $T_q$ , dentro de las cuales ocurre interacción durante un tiempo  $T_i$  que es menor que la longitud de cada ventana.

Sea el tiempo relativo en cada ventana  $\tau$ , que describe el tiempo transcurrido desde que comenzó la última inyección de qubit, tal que permite saber si estamos en fase de interacción o no  $\tau = t - KT_q$ , con  $K = \left\lfloor \frac{t}{T_q} \right\rfloor$ . Aquí,  $t \in \mathbb{T} = \{t_0, \dots, T_q, \dots, T_{sim}\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $0 \leq \tau \leq T_q$ . Sea  $\mathcal{T}$  el subintervalo de  $\mathbb{T}$  tal que  $\mathcal{T} = \{0, \dots, T_q\}$ , de modo que  $\tau \in \mathcal{T}$ .

Por otro lado, el estado del sistema cuántico se compone de un “contenedor” a la entrada de  $C$  que recoge todos los estados densidad de los qubits que pueden entrar (excitado, fundamental, y estado mixto). Sean las matrices densidad  $\hat{\rho}_{in}^{(k)}$  de cada qubit a la entrada de  $C$ , mapeados por el índice  $k = 1, 2, \dots, m$ , tales que  $\hat{\rho}_{in}^{(k)} \in \mathbb{H}_{in}^{(k)} \cong \mathbb{C}^2$  espacio de Hilbert donde viven las matrices válidas de  $\hat{\rho}_{in}^{(k)}$ . Se define el contenedor como  $\rho_{in} = \{\hat{\rho}_{in}^{(k)}\}_k \in \mathbb{H}_{in} = \bigotimes_{k=1}^m \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^{2^m}$ . El estado cuenta con otro “contenedor” a la salida de  $C$  que recoge todos los estados de los qubits que salen de la cavidad tras la interacción y que entran en el bloque de medida. Sean las matrices densidad  $\hat{\rho}_{out}^{(j)}$  de cada qubit a la salida de  $C$ , mapeados por el índice  $j = 1, 2, \dots, m$ , tales que  $\hat{\rho}_{out}^{(j)} \in \mathbb{H}_{out}^{(j)} \cong \mathbb{C}^2$  espacio de Hilbert donde viven las matrices válidas de  $\hat{\rho}_{out}^{(j)}$ , se define el contenedor  $\rho_{out} = \{\hat{\rho}_{out}^{(j)}\}_j \in \mathbb{H}_{out} = \bigotimes_{j=1}^m \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^{2^m}$ . Finalmente, se tiene además el estado densidad de los fotones en la cavidad, sea este  $\hat{\rho}_c \in \mathbb{H}_c$  sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_c \cong \mathbb{C}^{(N+1)}$  donde viven las matrices válidas de  $\hat{\rho}_c$ . Por simplicidad, denotaremos a la matriz por simplemente  $\rho_c$ . Sea entonces la matriz densidad total del sistema  $\rho = \rho_{in} \otimes \rho_c \otimes \rho_{out} \in \mathbb{H}_{in} \otimes \mathbb{H}_c \otimes \mathbb{H}_{out} \cong \mathbb{C}^{2^m} \otimes \mathbb{C}^{(N+1)} \otimes \mathbb{C}^{2^m} \cong \mathbb{C}^{2^{2m}(N+1)} \equiv \Lambda$ . Todo ello permite definir el estado del sistema  $x$ :

$$x = (\tau, \rho) \in \mathcal{T} \times \Lambda \quad (4)$$

La dinámica continua o de flujo ocurre de acuerdo a dos modos y en dos posibles conjuntos:

1. *Modo libre*. Cuando no hay qubits en la cavidad. La evolución ocurre de acuerdo a la ecuación de Lindblad, donde el hamiltoniano del sistema consta de 2 términos, el hamiltoniano de drive y el hamiltoniano natural de la cavidad. Se define el primer *flow set*  $C_1 = \{x \in \mathcal{T} \times \Lambda : T_i \leq \tau < T_q \text{ o } t < T_q\}$ .

2. *Modo con interacción*. Cuando sí hay qubit en la cavidad. La evolución continua también viene gobernada por la ecuación de Lindblad, sin embargo, aparecen dos términos extra en el hamiltoniano del sistema (el del qubit, y el de la interacción qubit-cavidad regido por el modelo de Jaynes-Cummings), véase (Haroche et al., 2013). Además, aparece un término de Lindblad extra que modela la interacción del qubit con el entorno. Se define el segundo *flow set*  $C_2 = \{x \in \mathcal{T} \times \Lambda : 0 \leq \tau < T_i\}$ .

3. Finalmente, se define el *flow set* total como  $C = C_1 \cup C_2$ .

En  $C_1$ , el hamiltoniano del sistema es  $\hat{H}_L = \hat{H}_c + \hat{H}_d = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \hbar(f(t)^*\hat{a}^\dagger + f(t)\hat{a})$ . De ese modo, la ecuación diferencial que dicta la dinámica continua de  $\rho_c$  en el modo libre es:

$$\dot{\rho}_c = \hat{\mathcal{L}}_c(\rho_c) \equiv -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_L, \rho_c] + \sum_{i=1}^2 (\hat{\mathcal{L}}_{ic}\rho_c\hat{\mathcal{L}}_{ic}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{L}}_{ic}^\dagger, \hat{\mathcal{L}}_{ic}, \rho_c\}) \quad (5)$$

Por otro lado, en  $C_2$  interviene el modelo de interacción de Jaynes-Cummings y operadores de disipación en los estados densidad del qubit. El Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_q + \hat{H}_{JC} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \hbar(f(t)^*\hat{a}^\dagger + f(t)\hat{a}) + \frac{\hbar}{2}\omega_q\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+)$ , con lo que la ecuación diferencial que dicta la evolución:

$$\dot{\rho} = \hat{\mathcal{L}}_{int}(\rho) \equiv -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho] + \hat{D}_c + \hat{D}_q^{(k)} \quad (6)$$

donde se ha hecho uso de los superoperadores  $\hat{D}_c$  y  $\hat{D}_q^{(k)}$  que describen los términos de Lindblad de la cavidad y del qubit.

Compactando todo, se tiene que la evolución de flujo es:

$$\dot{x} \equiv f(x) = \begin{cases} (\hat{I}_{in} \otimes \hat{\mathcal{L}}_c \otimes \hat{I}_{out})[\rho], & x \in C_1 \\ (\hat{I}_{in/k} \otimes \hat{\mathcal{L}}_{int} \otimes \hat{I}_{out})[\rho], & x \in C_2 \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\hat{I}_{in/k}$  es el operador identidad sobre todo aquel qubit que no esté interactuando con la cavidad, y  $\tau$  es una función tipo dientes de sierra.

Por otro lado, tienen lugar en el sistema dos eventos de salto: se lanza un qubit cuando  $t = KT_q$  de  $K = 1$  hasta  $K = m$ , es decir, cuando  $\tau = T_q$ . Dado que el estado del qubit que se lanza se escoge de manera determinista en base a  $u(t)$  a la entrada de la cavidad, se están generando eventos de salto en  $\rho_{in}$ . Es decir, tenemos un primer conjunto de salto  $D_1 = \{x \in \mathcal{T} \times \Lambda : \tau = T_q\}$ . Además, tras acabar la interacción de cada qubit con la cavidad, se aplica la operación de rotación y medida proyectiva sobre cada uno de ellos. Esto genera un salto estocástico en  $\rho_{out}$ . Esto ocurre cada vez que  $\tau = T_i$ , así, se define el segundo conjunto de salto  $D_2 = \{x \in \mathcal{T} \times \Lambda : \tau = T_i\}$ . Se define el *jump set* total como  $D = D_1 \cup D_2$ .

La evolución de salto en  $D_1$  la describe la función  $u(t)$ :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } K \bmod 3 = 0 \\ 0 & \text{si } K \bmod 3 = 1 \\ -1 & \text{si } K \bmod 3 = 2 \end{cases} \quad \text{donde } K = \left\lfloor \frac{t}{T_q} \right\rfloor \quad (8)$$

La lógica para estructurar el salto en el qubit será que, si  $u > 0$ , se lanza un qubit en el estado excitado  $|e\rangle$ , si  $u < 0$  en el estado fundamental  $|g\rangle$ , y si  $u = 0$  en el estado mixto  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ . En términos de estado  $\rho$ , esto genera un salto en el qubit  $k$ -ésimo  $\hat{\rho}_{in}^{(k)}$  tal que  $\rho \rightarrow \rho^+ = \hat{\rho}_{in}^{(k)+} \otimes \rho_c \otimes \rho_{out}$ . Así, se define la dinámica de salto en  $D_2$  teniendo en cuenta que:

$$\hat{\rho}_{in}^{(k)+} = \begin{cases} |e\rangle\langle e| & \text{si } u > 0 \\ |g\rangle\langle g| & \text{si } u < 0 \\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_{2x2} & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Por otro lado, cuando el estado del sistema está en  $D_2$ , se modifica  $\hat{\rho}_{out}^{(k)}$ . El salto lo genera el operador rotar y proyectar  $\hat{K}_j^\theta = \hat{M}_j\hat{R}_y(\theta)$ , cuya acción es la de mandar al estado del qubit al estado excitado o fundamental con probabilidades  $p_e = \text{Tr}(K_e \hat{\rho}_{out}^{(k)} K_e^\dagger)$  y  $p_g = 1 - p_e$ . Los operadores  $\hat{M}$  y  $\hat{R}_y$  son un operador de medida proyectiva de Kraus y una rotación de 90 grados en el eje y. Con ello, para un número aleatorio  $v$  uniformemente distribuido entre 0 y 1,  $v \sim N(0, 1)$  se define el salto en la matriz densidad del qubit que sale de la cavidad:

$$\hat{\rho}_{out}^{(k)+} = \begin{cases} |e\rangle\langle e|, & 0 \leq v < p_e \\ |g\rangle\langle g|, & p_e \leq v \leq 1 \end{cases} \quad (10)$$

y con lo que finalmente se define la dinámica de salto:

$$x^+ \equiv g(x) = \begin{cases} \hat{\rho}_{in}^{(k)+} \otimes \rho_c \otimes \rho_{out}, & x \in D_1 \\ \hat{\rho}_{in}^{(k)} \otimes \rho_c \otimes \hat{\rho}_{out}^{(k)+}, & x \in D_2 \end{cases} \quad (11)$$

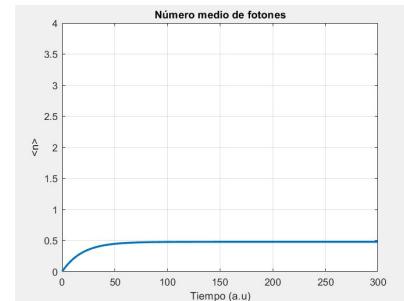
Todos los elementos descritos conforman el modelo híbrido  $\mathcal{H} = (C, f, D, g, v)$  del experimento de Haroche.

#### 4. Dinámica y respuesta del sistema

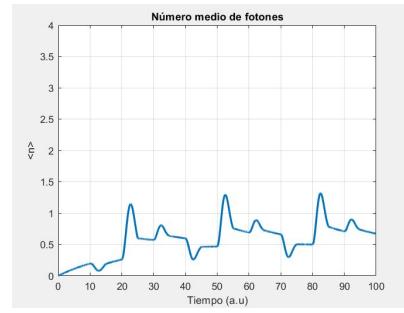
Una vez se ha hecho la formalización híbrida del sistema, se estudia a través de la simulación de MATLAB la dinámica natural del sistema sin drive ni qubits, y con entrada de qubits periódicos según  $u(t)$  en la Figura 3. Además, se estudia el efecto de entradas clásicas en teoría de control (escalón e impulso) en la salida del sistema en la Figura 4.

Se aprecia en la Figura 3 cómo la dinámica en ausencia de drive y de qubits es la esperada en un sistema cuántico abierto regido por la ecuación maestra de Lindblad. En cuanto al caso con inyección periódica de qubits, dado que la interacción es resonante (frecuencia de los qubits igual a la de la cavidad) estos son capaces de alterar el número medio de fotones de la cavidad. Si un qubit entra en el estado excitado, entonces este libera un fotón incrementando en una unidad el número de fotones de la cavidad, mientras que si entra en su estado fundamental, absorbe un fotón decrementando en un promedio de una unidad el número medio de fotones de la cavidad.

De la Figura 4 se deduce que ante la llegada de señales de una cierta amplitud, el sistema obedece la entrada y el número medio de fotones en el sistema cambia de acuerdo a ello. Además y en concordancia con la dinámica de sistemas cuánticos abiertos, con el cese de ambas señales, el número medio de fotones converge al estado térmico de Bose dada la dinámica disipativa gobernada por la ecuación de Lindblad, lo que sugiere que el sistema presenta un equilibrio estable en dicho estado térmico  $n_{th}$ .

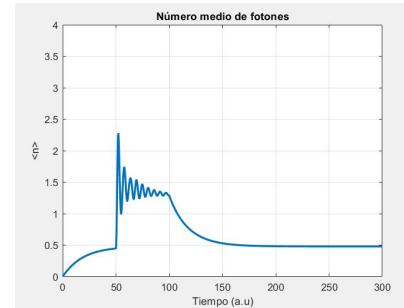


(a)  $\langle n \rangle$  con  $f(t) = 0$  y sin inyecciones de qubits

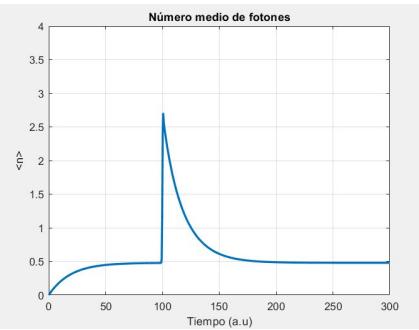


(b)  $\langle n \rangle$  con  $f(t) = 0$  y con inyecciones periódicas de qubits a cada 10 unidades de tiempo según  $u(t)$

Figura 3: Salida de  $\langle n \rangle$  en cavidad para  $\kappa = 0,05$  en el modo libre y sin drive ( $f(t) = 0$ ) y en el modo con inyecciones de qubits periódicas a cada 10 unidades de tiempo desde  $t = 10$



(a)  $\langle n \rangle$  con drive escalón finito  $f$  como señal de entrada de amplitud 0 si  $t < 50$ , 1 si  $50 < t < 100$ , y 0 en el resto, y sin inyección de qubits



(b)  $\langle n \rangle$  ante una señal de entrada impulsivo que se approxima con una gaussiana  $f(t) = 2e^{-(t-100)^2/0.5}$ . Modeliza un impulso sobre el sistema en el instante  $t = 100$ , y sin inyecciones de qubits

Figura 4: Salida de  $\langle n \rangle$  en cavidad para  $\kappa = 0,05$  sin inyecciones de qubits para dos entradas de drive clásicas en teoría de control, una señal escalón finito y un impulso gaussiano

## 5. Estimación del número medio de fotones a través de los qubits

De acuerdo a la idea que se propone en (Haroche et al., 2013), donde se habla del uso de qubits actuando como sondas para estimar el número de fotones en la cavidad, se estudia aquí el uso de qubits en interacción resonante para obtener dicha información a través de un proceso de medida estocástico. Se hace una simplificación del modelo de estudio en el que se elimina el drive,  $f(t) = 0$ , y se inyectan qubits periódicamente a cada 5 unidades de tiempo (dentro del marco de unidades naturales, las unidades de tiempo se miden en múltiplos del tiempo de Planck  $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 5,39 \times 10^{-44}$  segundos, siendo  $G$  la constante de la gravitación universal,  $c$  la velocidad de la luz, y  $\hbar$  la constante de Planck reducida) dentro de  $T_{sim} = 30$ . Se muestra en la Figura 5 el resultado de la simulación para las poblaciones de Fock (véase por ejemplo (Cohen-Tannoudji et al., 1977)), así como para la evolución del número medio de fotones en la cavidad con el paso del tiempo.

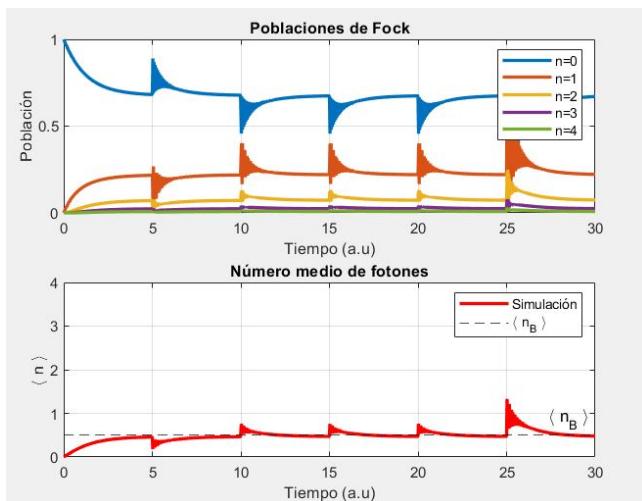


Figura 5: Poblaciones de Fock (probabilidad de encontrar exactamente  $n$  fotones en el instante  $t$ ) y evolución de  $\langle n \rangle$  con inyecciones periódicas de qubits en ausencia de drive  $f = 0$

La idea para hacer la estimación del número de fotones en la cavidad a través de la medida proyectiva en el estado de los qubits se sustenta en el hecho de que los qubits adquieren una fase durante la evolución dentro de la cavidad que contiene información del número de fotones en la cavidad (véase (Haroche et al., 2013) para más detalle). Aquí se utiliza una simplificación del modelo en la que el número medio de fotones estimado viene dado por  $n_{est} = \arccos(\rho'_{12} + \rho'^*_{12}) - \frac{1}{2}$ , donde  $\rho'_{12}$  es el elemento 1,2 de la matriz densidad del qubit después de la rotación y la medida proyectiva al salir de la cavidad. A través de ello, se obtiene para la simulación de la Figura 5 un  $n_{est} \approx 1,078$  fotones. Esto difiere ligeramente con los  $\sim 0,5$  fotones que hay en la cavidad dado que la interacción que se está teniendo en cuenta es resonante, luego el hecho de que el qubit pueda interactuar con la cavidad altera directamente el número medio de fotones. El error absoluto en el cálculo

$\epsilon = |\langle n \rangle - n_{est}| = 0,578$  evidencia que si la interacción qubit-fotón es resonante y no dispersiva, como en (Haroche et al., 2013), el estado de los qubits salientes adquiere términos de fase sobreestimando el número real de la medida.

## 6. Conclusiones

El modelo híbrido propuesto permite analizar la dinámica de cavidades cuánticas bajo el marco de sistemas híbridos estocásticos, facilitando una descripción clara de la evolución continua y los saltos asociados a inyecciones y medidas. La implementación en MATLAB/Simulink reproduce fielmente la dinámica esperada y permite evaluar entradas tipo drive clásicas en teoría de control. El análisis sugiere un equilibrio estable en el estado térmico, coherente con la distribución de Bose-Einstein. La interacción de los qubits con la cavidad permite hacer una estimación aproximada del número de fotones de la cavidad sin necesidad de hacer una medida directa sobre  $\langle n \rangle$ , sobreestimando ligeramente el resultado dado que la interacción se ha tomado resonante. Sin embargo, se sugiere que con un esquema de control realimentado aprovechándose de la medida, se pueda ir minimizando el error en la estimación.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a los proyectos PID2020-112709RB-C22 and PID2023-149066NB-I00, financiados por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

## Referencias

- Åström, K. J., y Murray, R. M. (2008). *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., y Laloë, F. (1977). \*Quantum Mechanics\* (Vols. I and II). Wiley-Interscience.
- D'Alessandro, D. (2022). \*Introduction to Quantum Control and Dynamics\* (2nd ed.). CRC Press.
- Goebel, R., Sanfelice, R. G., y Teel, A. R. (2012). \*Hybrid dynamical systems: Modeling, stability, and robustness\*. Princeton University Press.
- Haroche, S. y Raimond, J. M. (2013). Bohr's legacy in cavity QED. En \*Niels Bohr, 1913–2013: Poincaré Seminar 2013\*, pp. 291–316. Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-00330-4\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00330-4_10)
- Huang, K. (1987). \*Statistical Mechanics\* (2nd ed.). Wiley.
- Korsch, H. J. (2019). *Lindblad dynamics of the damped and forced quantum harmonic oscillator*. arXiv preprint arXiv:1908.01187v2. <https://arxiv.org/abs/1908.01187v2>
- Mandl, F., y Shaw, G. (2010). *Quantum Field Theory* (2nd ed.). Wiley.
- Sáez, J. F., Baños, A., y Arenas, A. (2025). Hybrid control of MISO systems with delays. \*ISA Transactions\*, 161, 216–227.
- Teel, A. R. (2013). Lyapunov conditions certifying stability and recurrence for a class of stochastic hybrid systems. \*Nonlinear Analysis and Hybrid Systems\*, 37(1), 1–24.
- Teel, A. R., Subbaraman, A., y Sferlazza, A. (2014). Stability analysis for stochastic hybrid systems: A survey. \*Automatica\*, 50(10), 2435–2456. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.08.006>
- Weidner, C. A., Reed, E. A., Monroe, J., Sheller, B., O'Neil, S., Maas, E. A., Jonckheere, E. A., Langbein, F. C., y Schirmer, S. (2025). Robust quantum control in closed and open systems: Theory and practice. \*Automatica\*, 172:111987. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2024.111987>