

Jornadas de Automática

Muestreo óptimo en sistemas no lineales mediante el operador de Koopman

Asier Ibeas^a, Pedro Balaguer^{b,*}, José Carlos Alfonso^c

^aDept. de Telecomunicació i Enginyeria de Sistemes, Universitat Autònoma de Barcelona, C. de les Sítges s/n, 08193, Cerdanyola del Vallès, España.

^bDpto. de Diseño y Sistemas Industriales, Universitat Jaume I, C/ José Gutiérrez Abascal 2, 28006, Castellón de la Plana, España.

^cDpto. de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Vigo, Campus Universitario Lagoas-Marcosende, 36310, Vigo, España.

To cite this article: Ibeas, Asier, Balaguer, Pedro, Alfonso, José Carlos. 2026. Optimal sampling in nonlinear systems using the Koopman operator. *Jornadas de Automática*, 47. <https://doi.org/10.17979/ja-cea.2026.47.13670>

Resumen

Este artículo desarrolla patrones de muestreo óptimos para el diseño de control LQR con tiempo final libre en sistemas no lineales. Para ello, la dinámica no lineal se representa a través del operador de Koopman, lo que permite aprovechar la metodología previamente desarrollada para sistemas lineales y aplicarla a la resolución de este problema. Cuando la linealización de Koopman es cerrada, la representación del sistema no lineal mediante un sistema lineal de dimensión finita resulta exacta. Por el contrario, si la representación es de dimensión infinita, esta se trunca a un orden finito para diseñar patrones de muestreo basados en el modelo lineal aproximado. Se presenta el marco teórico que fundamenta la propuesta y se ilustra la eficacia del método mediante diversos ejemplos representativos.

Palabras clave: Muestreo óptimo, Teoría del control óptimo, Aplicaciones del análisis y diseño no lineal, Control en red.

Optimal sampling in nonlinear systems using the Koopman operator

Abstract

This paper develops optimal sampling patterns for free-final-time LQR control design in non-linear systems. To this end, the non-linear dynamics are represented through the Koopman operator, which allows leveraging the methodology previously developed for linear systems and applying it to solve this problem. When the Koopman linearization is closed, the representation of the non-linear system by a finite-dimensional linear system is exact. Conversely, if the representation is infinite-dimensional, it is truncated to a finite order to design sampling patterns based on the approximate linear model. The theoretical framework underlying the proposal is presented, and the effectiveness of the method is illustrated through various representative examples.

Keywords: Optimal sampling, Optimal control theory, Applications of nonlinear analysis and design, Networked systems.

1. Introducción

Los *sistemas de control en red* representan una clase de sistemas caracterizados por el hecho de que el lazo de control se cierra a través de una red de comunicaciones, (Zhao et al., 2015). Aunque los inicios de este concepto se remontan a la década de los 80, (Halevi and Ray, 1988), es actualmente gracias a los avances en electrónica y computación que goza de una gran popularidad. Los sistemas de control en red aportan numerosas ventajas con respecto a los sistemas de control tradicionales pero también representan retos de diseño e im-

plementación importantes relacionados especialmente con un ancho de banda limitado, lo que ocasiona la aparición de retardos, la pérdida de información o la sobrecarga y congestión de la red, (Gautam et al., 2021). En particular, si el período de muestreo es demasiado pequeño, se puede sobrecargar la red al transmitir demasiados datos, causando pérdidas y retrasos en la comunicación y generando finalmente una degradación general en las prestaciones de control. Por otro lado, si es demasiado grande se pueden estar omitiendo aspectos de la dinámica del sistema que son cruciales para garantizar la estabilidad y desempeño del control. Es por ello que es de especial

*Autor para correspondencia: pbalague@esid.uji.es

importancia generar adecuadamente la cantidad de datos a intercambiar entre los diferentes componentes de un sistema de control en red.

El control digital se ha basado tradicionalmente en muestreo periódico, adoptado principalmente por la facilidad que ofrecía para aplicar herramientas matemáticas como la teoría del muestreo y la transformada $\mathcal{Z}$. En los primeros sistemas, la limitada capacidad de cómputo y el alto costo de la memoria planteaban restricciones significativas, lo que impulsó la investigación de métodos de muestreo más eficientes que pudieran reducir la carga de cálculos y almacenamiento de datos. Esto condujo a cuestionamientos sobre si el muestreo periódico era realmente la mejor opción, (Dorf et al., 1962), dando lugar a diversas alternativas en las décadas de 1960 y 1970, (Dorf et al., 1962)-(Hsia, 1974). Con la disminución de los costos de electrónica y el aumento del poder de cómputo, el muestreo periódico se consolidó como la práctica predominante. Hoy en día, la aparición de sistemas de control en red con ancho de banda limitado ha vuelto a poner de relevancia la optimización de los instantes de muestreo, (Bini and Buttazzo, 2014). El problema de muestreo óptimo para control consiste en seleccionar N señales de control u_k , aplicadas mediante un retenedor de orden cero (ZOH) a la planta continua, junto con los instantes de aplicación t_k , de manera que se minimice un funcional de desempeño del sistema, (Bini and Buttazzo, 2014; Balaguer and Arino, 2021).

La solución del problema de optimización no es posible, en general, de forma analítica cerrada y en consecuencia se han utilizado métodos numéricos para ello. En (Balaguer and Alfonso-Gil, 2022) para el caso escalar y en (Balaguer and Arino, 2021) para el caso general de un sistema multivariable de dimensión arbitraria, se aborda el diseño de la secuencia de instantes de muestreo para el control LQR con tiempo final libre. Para ello, se propone un algoritmo basado en programación dinámica, escalable con el número de muestras, que computa numéricamente la política de muestreo que minimiza dicho criterio de coste sobre un horizonte discretizado. El problema está formulado para un sistema continuo en el que el conjunto de entradas de control está constituido por señales continuas a trozos. Para su solución, se discretiza exactamente el sistema continuo original bajo esas señales de control y se resuelve numéricamente el problema de optimización de muestreo y control LQR sobre el modelo discretizado. La solución del mismo problema para sistemas no lineales es considerablemente más complicada, ya que el control óptimo resultante deja de admitir una caracterización explícita como en el caso LQR y, en general, debe abordarse mediante condiciones necesarias de optimalidad basadas en el principio del máximo o en la ecuación de Hamilton–Jacobi–Bellman (Oishi and Sakamoto, 2021; Hammer, 2023).

El objetivo del presente trabajo es extender los resultados de sistemas lineales a sistemas no lineales representados a través del operador de Koopman. El operador de Koopman constituye una representación lineal, de dimensión potencialmente infinita, que captura exactamente la dinámica de un sistema no lineal (Mauroy et al., 2020). El uso del operador de Koopman ha recibido una gran atención en los últimos años

por sus aplicaciones en el análisis y diseño de sistemas de control (Mauroy et al., 2020), ya que permite extender de forma directa muchas de las herramientas disponibles en el caso lineal a sistemas no lineales. En el contexto del problema de muestreo óptimo que se plantea, la ventaja del uso del operador de Koopman radica en que se puede aplicar el formalismo ya desarrollado para sistemas lineales en (Balaguer and Arino, 2021) a sistemas no lineales. A este respecto, la contribución fundamental de este artículo radica precisamente en la intersección de ambas metodologías: hasta donde alcanza el conocimiento de los autores, esta constituye la primera vez que se emplea la representación del operador de Koopman para abordar y resolver el problema de diseño de secuencias de muestreo óptimo en sistemas no lineales afines en el control. En particular, en este trabajo se estudiarán los sistemas continuos no lineales cuya linealización por el operador de Koopman sea afín en el control, es decir, dé lugar a un sistema lineal de control en la forma $\dot{z} = Mz + Bu$. Para este caso, se analizarán dos situaciones: *i)* cuando el proceso de linealización es cerrado, esto es, da lugar a un sistema lineal finito-dimensional, y *ii)* cuando da lugar a un sistema lineal infinito-dimensional. En este último caso, el sistema infinito-dimensional se truncará a un cierto nivel de aproximación lineal p .

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma. La Sección 2 describe la formulación del problema y la metodología abordada para su solución. La Sección 3 muestra algunos ejemplos de aplicación del enfoque propuesto. Finalmente, la Sección 4 contiene las conclusiones y líneas futuras de investigación.

2. Formulación del problema y metodología

Sea un sistema de control no lineal afín dado por¹:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$. Para este sistema se desea encontrar el regulador cuadrático óptimo a tiempo finito libre, T_N , de tal forma que se minimice el funcional $J(u)$ definido por:

$$J(u) = \int_0^{T_N} \left[x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t) \right] dt + x(T_N)^T S x(T_N) \quad (2)$$

donde $Q = Q^T \geq 0$ mientras que $R = R^T > 0$ y $S = S^T > 0$. Se asume que el sistema no lineal está controlado por una señal de control constante a trozos dada por $u(t) = u_k$ para $t \in [t_k, t_{k+1})$ con $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ constante. El problema del muestreo óptimo consiste en dado un entero finito N , encontrar los instantes de muestreo $\{t_k\}_{k=0}^{N-1}$ con $t_{N-1} = T_N$ (libre) y los valores de la señal de control $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ que minimicen (2). Para ello se va a representar el sistema no lineal (1) mediante un sistema lineal al que se le van a aplicar las técnicas de (Balaguer and Arino, 2021). En este trabajo se ha utilizado el enfoque de (Goswami and Paley, 2022) para generar un sistema lineal equivalente a (1). La solución formal de (1) se puede escribir en forma integral como:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau + \int_0^t g(x(\tau)) u(\tau) d\tau \quad (3)$$

¹Por claridad, se omite a lo largo del trabajo la dependencia temporal de las funciones con el tiempo, $x = x(t)$, $u = u(t)$.

Definiendo el flujo inducido por el sistema no autónomo en la forma, (Brunton and Kutz, 2019):

$$F_t(x_0, u(\cdot)) := x_0 + \int_0^t f(F_\tau(x_0, u)) d\tau + \int_0^t g(F_\tau(x_0, u)) u(\tau) d\tau$$

podemos re-escribir (3) como $x(t) = F_t(x_0, u(\cdot))$. A partir del operador $F_t(x_0, u(\cdot))$, y con objeto de aplicar la teoría de Koopman a este tipo de sistemas, consideramos el espacio vectorial de funciones $C = \{z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid z \in C^1\}$. Las funciones en este espacio reciben el nombre de *observables* en el contexto de la teoría de Koopman. Ahora, podemos definir el operador de Koopman como $\mathcal{K}_{t,u}z(x_0) = z \circ F_t(x_0, u(\cdot)) = z(F_t(x_0, u(\cdot)))$, es decir, el operador proporciona para cada t el valor del observable en ese instante a lo largo de las soluciones del sistema no lineal. Podemos definir su generador infinitesimal local como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}z(x_0, u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{z(F_t(x_0, u(\cdot))) - z(x_0)}{t} \\ &= \nabla z(x_0)^T f(x_0) + \nabla z(x_0)^T g(x_0)u(0) \end{aligned} \quad (4)$$

con lo que la dinámica del sistema en el espacio de observables está descrita por:

$$\dot{z} = f(x)^T \nabla z(x) + u(t)g(x)^T \nabla z(x) \quad (5)$$

y el sistema no lineal (1) se representa a través del modelo lineal y exacto en el espacio de observables (5). El precio que se paga por la linealización exacta es que el sistema resultante tiene, en general, dimensión infinita en lugar de finita. Si existe una función $T : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x = T(z)$, entonces el sistema no lineal en $\mathbb{R}^n$ se ha representado mediante un sistema lineal en C , es decir, la dinámica no lineal en $\mathbb{R}^n$ queda codificada en la dinámica lineal en C . Por tanto, se necesita que los observables estén elegidos de una manera juiciosa para que se pueda recuperar el estado a partir de la dinámica lineal en C y, entonces, el operador de Koopman se puede interpretar como una transformación de coordenadas en el sistema que lo linealiza globalmente. Si la dinámica del sistema no lineal está restringida a un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un conjunto numerable y denso de funciones $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ tal que cualquier observable puede aproximarse arbitrariamente bien mediante combinaciones lineales de dichos elementos. Por otra parte, si el generador infinitesimal del operador de Koopman admite un conjunto discreto de funciones propias que constituye un sistema generador (o un conjunto denso) en el espacio de observables, entonces es natural seleccionar precisamente este conjunto como sistema generador. En tal caso, cualquier observable puede expandirse en términos de estas funciones propias y, por tanto, la dinámica se representa de manera lineal en coordenadas de Koopman. Las funciones propias, z_n , serán aquéllas que cumplan:

$$f^T \nabla z_n + u g^T \nabla z_n = \lambda_n z_n \quad (6)$$

para algún λ_n , llamado valor propio asociado a la función propia z_n . Por tanto, las funciones propias son las soluciones de la ecuación en derivadas parciales (6). De esta forma, podemos considerar una base formada por funciones propias $\{z_n\}_{n=0}^\infty$. Si existe un entero finito m tal que cualquier observable $\omega \in C$ se puede expresar como combinación lineal de un conjunto pre-definido de m funciones propias, $\omega = \sum_{i=1}^m \mu_i z_i$, entonces

el sistema no-lineal original está representado por un sistema finito-dimensional lineal en C . Esta es una circunstancia especial que en general no ocurre salvo para algunos sistemas no-lineales en concreto. A veces, aunque el sistema de Koopman sea infinito-dimensional, es posible aproximarlo como un sistema finito truncando el número de observables utilizados. La elección de un buen conjunto de observables no es trivial, ya que debe capturar adecuadamente la dinámica del sistema. La componente $\nabla z(x_0)^T f(x_0)$ es lineal en z pero $\nabla z(x_0)^T g(x_0)u(t)$ puede no serlo, ya que el observable z multiplica a la señal de control u . Si el conjunto $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ de funciones propias del operador de Koopman constituye un espacio invariante para el operador $g^T \nabla$, entonces el sistema es bilineal, (Goswami and Paley, 2022). En este trabajo, nos vamos a restringir al caso en el que el operador de Koopman puede ser representado en una forma afín en el control, lo que representa una clase limitada de sistemas, mientras que el caso general bilineal será tratado en trabajos posteriores. El sistema truncado en el espacio de Koopman adopta una forma estrictamente afín en el control $\dot{z} = Mz + Bu$, con una matriz de entrada B constante, si y solo si el vector de observables $z(x)$ y el campo vectorial de entrada $g(x)$ satisfacen la condición $g(x)^T \nabla z = B$. En la siguiente sección se presentan varios ejemplos de sistemas para los que el enfoque propuesto resulta de interés, incluyendo aquellos que admiten una representación lineal exacta o aproximada mediante un número finito de términos.

2.1. Formulación del problema de control óptimo para el sistema linealizado

Una de las cuestiones que aparece al resolver el problema del muestreo óptimo a través del modelo lineal es que la dimensión del sistema linealizado es diferente a la del sistema original. Por tanto, el funcional (2) debe adaptarse a este nuevo marco. Es habitual considerar matrices de ponderación diagonales, $Q = \text{diag}(q)$ y $S = \text{diag}(s)$, asociadas a los vectores de pesos $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ y $s^T = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Dado que la transformación de Koopman introduce un espacio de observables de dimensión $p > n$, es necesario extender dichas ponderaciones al espacio elevado. Para ello, se utiliza la misma estructura funcional definida por los observables. En particular, si $z = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x))^T$, los vectores de pesos en el espacio de observables se definen como $q_a^T = (z_1(q), z_2(q), \dots, z_p(q))$ y $s_a^T = (z_1(s), z_2(s), \dots, z_p(s))$. De este modo, cada observable hereda la ponderación de las variables originales que intervienen en su definición. Por ejemplo, si $z_k(x) = x_i$, entonces $q_{a,k} = q_i$. Si $z_k(x) = x_i^2$, entonces $q_{a,k} = q_i^2$, y si $z_k(x) = x_i x_j$, entonces $q_{a,k} = q_i q_j$. Esta construcción preserva la importancia relativa asignada a los estados originales y proporciona una extensión consistente de las ponderaciones al espacio de observables. Las matrices de ponderación del problema lineal cuadrático en el espacio elevado se definen entonces como $Q_a = \text{diag}(q_a)$, $S_a = \text{diag}(s_a)$, y el funcional de coste adoptado es:

$$J(u) = \int_0^{T_N} [z(t)^T Q_a(t) z(t) + u(t)^T R(t) u(t)] dt + z(T_N)^T S_a z(T_N),$$

el cual se emplea para obtener la solución del problema de control óptimo mediante el procedimiento descrito en (Balaquer and Alfonso-Gil, 2022). Las señales de control serán con-

tinuas a trozos y la solución se calculará a través de la discretización exacta del sistema linealizado y la resolución numérica del problema de control resultante.

3. Ejemplos de aplicación

En esta sección se presentará el operador de Koopman para algunos sistemas no lineales y el resultado del proceso de optimización de los instantes de muestreo para los sistemas lineales obtenidos.

3.1. Sistema planar con linealización finita

Sea el sistema planar dado por:

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = \lambda(x_2 - x_1^2) + bu \quad (8)$$

$$y = x_2 \quad (9)$$

Este sistema admite una linealización global en C finita. Para ello, se proponen los observables $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ y $z_3 = x_1^2$, y el sistema planar (7)-(8) se puede escribir de forma exacta como el sistema lineal de orden 3 dado por:

$$\dot{z} = Mz + Bu \quad (10)$$

$$y = Cz \quad (11)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (12)$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

El estado original se puede obtener a partir del valor de z_1 y z_2 . A modo de ejemplo, consideremos el sistema no lineal (7)-(8) con parámetros $\mu = -2$, $\lambda = -1$, y $b = 1$. Se propone el diseño del controlador LQR discreto con las matrices de coste $Q = \text{diag}(0, 10, 0)$ y $R = 1$. Primeramente se diseña la acción de control discreta óptima con un único intervalo de tiempo óptimo $N = 1$, cuya duración es igual a $\tau_0^* = 0,47s$. La duración del intervalo de tiempo óptimo se han calculado a través del enfoque de (Balaguer and Arino, 2021), basado en la programación dinámica. La Figura 1 muestra dicha acción de control óptima discreta u_k^* junto con la salida y_k^* del sistema no lineal (7)-(8). En la misma figura también se muestra la acción de control óptima $u(t)^*$ y su salida $y(t)^*$ obtenida empleando el control LQR continuo. Si se incrementa el número de intervalos de la acción de control a $N = 10$ se obtiene una salida mucho más parecida a la que proporciona el diseño LQR continuo, tal como puede verse en la Figura 2. En este caso, el incremento del coste del control óptimo discreto es solamente un 0,2 % superior al del control LQR continuo.

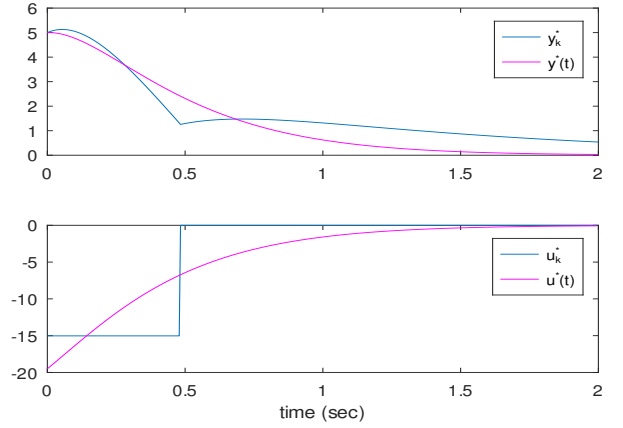


Figura 1: Salida $y_k^*(t)$ del sistema no lineal (7)-(8) con acción de control con intervalos de tiempo óptimos, $u_k^*(t)$, con $N = 1$, y su comparación con la salida $y(t)^*$ obtenida mediante acción de control continua $u(t)^*$ del LQR clásico.

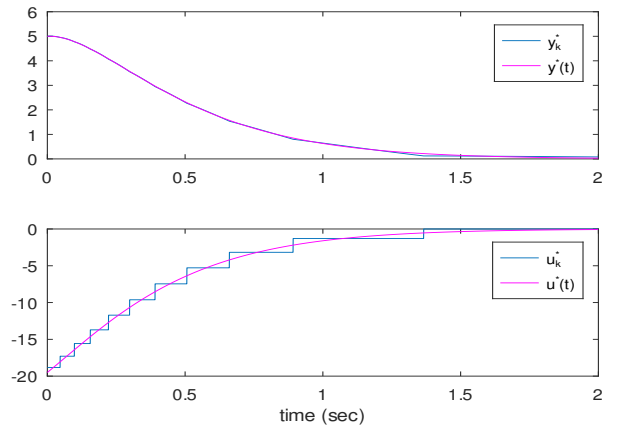


Figura 2: Salida $y_k^*(t)$ del sistema no lineal (7)-(8) con acción de control con intervalos de tiempo óptimos, $u_k^*(t)$, con $N = 10$, y su comparación con la salida $y(t)^*$ obtenida mediante acción de control continua $u(t)^*$ del LQR clásico.

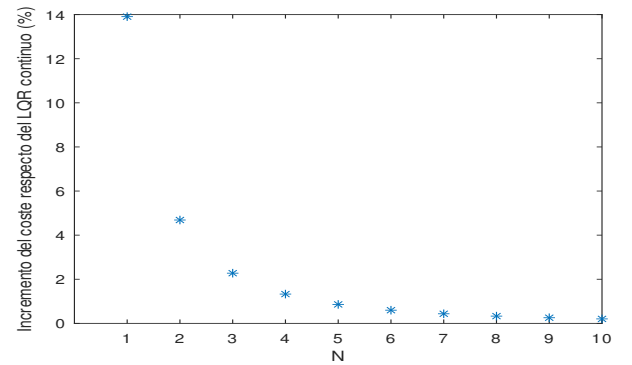


Figura 3: Incremento del coste LQR al emplear la acción de control discreta u_k^* con N intervalos de tiempo óptimos τ_k^* con respecto al coste LQR óptimo continuo dado por la acción de control óptima $u(t)^*$.

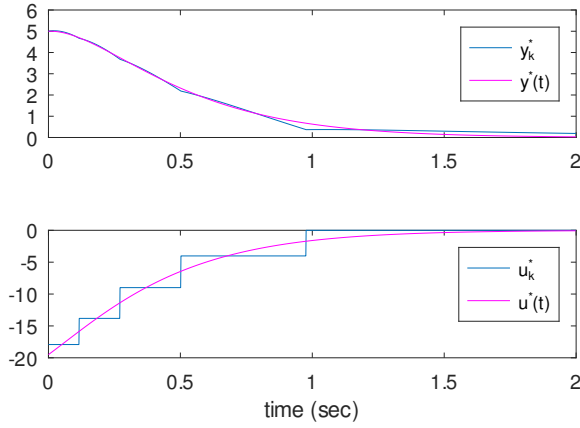


Figura 4: Salida $y_k^*(t)$ del sistema no lineal (7)-(8) con acción de control con intervalos de tiempo óptimos, $u_k^*(t)$, con $N = 4$, y su comparación con la salida $y(t)^*$ obtenida mediante acción de control continua $u(t)^*$ del LQR clásico.

En la Figura 3 se muestra el incremento del coste LQR discreto con respecto al continuo en función del número de cambios en la acción de control N . Puede verse que a partir de $N = 4$ el incremento del coste es menor de un 1 %, si bien para valores más elevados de N la mejora es marginal. Por tanto, se considera que un diseño con $N = 4$ intervalos de control da lugar a un coste y una salida similares al control continuo, tal como puede verse en la Figura 4.

3.2. Sistema de orden 3 con linealización finita

Sea el sistema dado por:

$$\dot{x}_1 = -x_1 \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_2 \quad (15)$$

$$\dot{x}_3 = 3x_1x_2 - 3x_3 + bu \quad (16)$$

$$y = x_3 \quad (17)$$

En las nuevas variables, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3$, $z_4 = x_1^2$, $z_5 = x_1x_2$ y $z_6 = x_3^3$, el sistema (14)-(16) se puede escribir como (10)-(11) con

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

y

$$B^T = b[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (19)$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (20)$$

De la estructura de la matriz (18) se observa que la dinámica original del sistema se puede recuperar de z_1 , z_2 y z_3 . En este caso se diseña el controlador LQR con 6 instantes de muestreo con las matrices de coste $Q = \text{diag}(0, 0, 10, 0, 0, 0)$ y $R = 1$, y valor $b = 1$. En la Figura 5 se muestra la salida y_k^* del sistema no lineal (14)-(16) cuando se aplica la acción de control óptima u_k^* con intervalos de tiempo óptimos τ_k^* y la acción de control óptima $u(t)^*$, y su salida $y(t)^*$ obtenida empleando

el control LQR continuo. Al igual que en el caso anterior, la trayectoria óptima discreta con un número finito de muestras y la continua son muy parecidas. El valor $N = 6$ se ha seleccionado como compromiso entre la complejidad del esquema de muestreo y la mejora del funcional de coste, como se ha discutido en la Sección 3.1. Dicho número de muestras incurre en un incremento del coste del 1,9 % con respecto al coste LQR continuo.

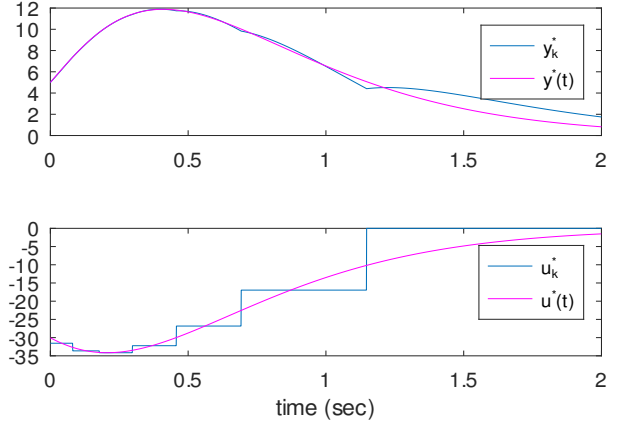


Figura 5: Salida $y_k^*(t)$ del sistema no lineal (14)-(16) con acción de control con intervalos de tiempo óptimos, $u_k^*(t)$, con $N = 6$, y su comparación con la salida $y(t)^*$ obtenida mediante acción de control continua $u(t)^*$ del LQR clásico.

3.3. Sistema con linealización infinita aproximado

Ahora consideremos un sistema que no admite una linealización global finita, pero admite una infinita con diferentes grados de aproximación, para diferentes órdenes de truncamiento o aproximación. Consideremos un sistema planar dado por:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + ku \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2) \quad (22)$$

$$y = x_1 \quad (23)$$

donde $f(x_2)$ es una función no-lineal, por ejemplo, polinomial. El operador de Koopman es infinito, pero puede truncarse a diferentes órdenes para obtener sistemas linealizados aproximados. Por ejemplo, para la función $f(x_2) = -x_2 + x_2^3$ si truncamos el operador de Koopman a orden 5 y elegimos como observables las variables $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_2^3$, $z_4 = x_2^5$ y $z_5 = x_2^7$, (21)-(22) se representan como (10)-(11) con:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (24)$$

y

$$B^T = k[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (25)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (26)$$

La evolución de las variables de estado originales se puede recuperar de los observables z_1 y z_2 . A modo de ejemplo consideremos el sistema con $a = -1$, $b = 1$ y $k = 1$. Diseñando un controlador LQR con 5 instantes de muestreo y matrices de

coste $Q = \text{diag}(10, 0, 0, 0, 0)$ y $R = 1$, la Figura 6 muestra la salida y_k^* del sistema no lineal (21)–(22) al aplicar la acción de control óptima u_k^* junto con los intervalos de tiempo óptimos τ_k^* , con $N = 5$. Asimismo, se compara con la acción de control óptima continua $u^*(t)$ y la salida correspondiente $y^*(t)$ obtenidas mediante un controlador LQR continuo diseñado para el sistema lineal aproximado. Al igual que en los casos anteriores, la salida con el control discreto óptimo es muy parecida a la salida del control óptimo continuo pues el incremento del coste es del 2,0 % con respecto al coste LQR continuo.

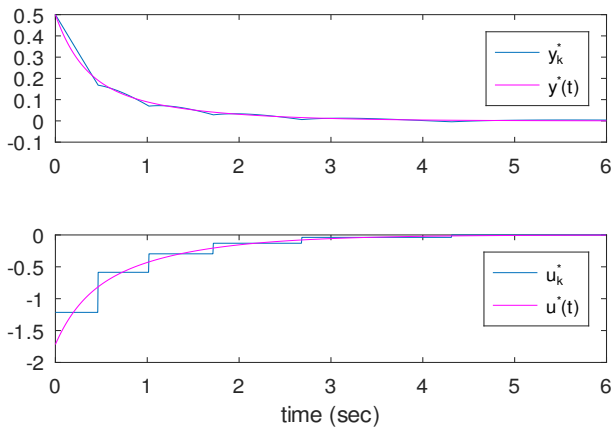


Figura 6: Salida $y_k^*(t)$ del sistema no lineal (21)–(22) con acción de control con intervalos de tiempo óptimos, $u_k^*(t)$, con $N = 5$, y su comparación con la salida $y(t)^*$ obtenida mediante acción de control continua $u(t)^*$ del LQR clásico.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha abordado el problema del muestreo óptimo para sistemas no lineales mediante el uso del operador de Koopman. La contribución principal consiste en extender a sistemas no lineales el marco metodológico previamente desarrollado para sistemas lineales en (Balaguer and Arino, 2021) y (Balaguer and Alfonso-Gil, 2022), aprovechando la capacidad del operador de Koopman para proporcionar una representación lineal (posiblemente infinita, pero truncable en ese caso) de la dinámica original. Esta aproximación permite aplicar de manera directa técnicas consolidadas para el muestreo óptimo en sistemas lineales, evitando la necesidad de recurrir a formulaciones específicas para cada tipo de no linealidad o a procesos de optimización costosos. El trabajo ha mostrado que, para clases relevantes de sistemas no lineales cuya linealización de Koopman es afín en el control, es posible obtener de forma sistemática conjuntos de instantes de muestreo apropiados mediante una estrategia totalmente análoga a la utilizada en el caso lineal. Los ejemplos presentados ilustran la viabilidad del procedimiento y evidencian que la aproximación basada en Koopman constituye una herramienta eficaz para extender técnicas lineales de control óptimo al ámbito no lineal con un coste computacional asumible. Si bien este trabajo establece las bases metodológicas del enfoque propuesto, la cuantificación exhaustiva de sus ventajas frente a la literatura existente constituye un objetivo central a corto plazo. Como trabajo futuro, se llevará a cabo una comparativa sistemática con métodos alternativos de muestreo óptimo para sistemas

no lineales como el de (Gu and Mei, 2021). Complementariamente a esta validación, resulta necesario estudiar el impacto del orden de truncamiento y la influencia de las matrices de ponderación en el criterio de optimalidad. Finalmente, una extensión natural de este formalismo consistirá en su aplicación para la obtención de instantes de muestreo óptimos en sistemas bilineales, dado que este tipo de sistemas surge de forma recurrente dentro del enfoque de Koopman.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i PID2024-161942NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER/UE. Los autores agradecen a los revisores sus comentarios, los cuales han mejorado la calidad de este trabajo.

Referencias

- Balaguer, P., Alfonso-Gil, J. C., Jun. 2022. Optimal sampling pattern for free final time linear quadratic regulator: the scalar case. *Int. J. Control* 95 (6), 1522–1532.
DOI: 10.1080/00207179.2020.1861335
- Balaguer, P., Arino, C., Dec. 2021. Optimal sampling pattern for the free final time linear quadratic regulator. *IEEE Trans. Control Netw. Syst.* 8 (4), 1592–1600.
DOI: 10.1109/TCNS.2021.3074561
- Bini, E., Buttazzo, G. M., Jan. 2014. The optimal sampling pattern for linear control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 59 (1), 78–90.
DOI: 10.1109/TAC.2013.2279913
- Brunton, S. L., Kutz, J. N., 2019. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press.
DOI: 10.1017/9781108380690
- Dorf, R., Farren, M., Phillips, C., Jan. 1962. Adaptive sampling frequency for sampled-data control systems. *IRE Trans. Autom. Control* 7 (1), 38–47.
DOI: 10.1109/TAC.1962.1105415
- Gautam, M. K., Pati, A., Mishra, S. K., Appasani, B., Kabalci, E., Bizon, N., Thounthong, P., Mar. 2021. A comprehensive review of the evolution of networked control system technology and its future potentials. *Sustainability* 13 (5), 2962.
DOI: 10.3390/su13052962
- Goswami, D., Paley, D. A., Jun. 2022. Bilinearization, reachability, and optimal control of control-affine nonlinear systems: A koopman spectral approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 67 (6), 2715–2728.
DOI: 10.1109/TAC.2021.3088802
- Gu, H., Mei, J., Dec. 2021. Optimal sampling control of nonlinear systems based on adaptive dynamic programming. In: *2021 8th International Conference on Information, Cybernetics, and Computational Social Systems (ICCSS)*. IEEE.
DOI: 10.1109/ICCSS53909.2021.9721972
- Halevi, Y., Ray, A., December 1988. Integrated communication and control systems: Part i—analysis. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME* 110 (4), 367–373.
DOI: 10.1115/1.3152698
- Hammer, J., Oct. 2023. Optimal robust control of nonlinear systems: inter-sample optimisation in sampled-data control. *Int. J. Control*, 1–20.
DOI: 10.1080/00207179.2023.2260901
- Hsia, T., Feb. 1974. Analytic design of adaptive sampling control law in sampled-data systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 19 (1), 39–42.
DOI: 10.1109/TAC.1974.1100455
- Mauroy, A., Mezić, I., Susuki, Y. (Eds.), Feb. 2020. *The Koopman operator in systems and control, 2020th Edition. Lecture notes in control and information sciences*. Springer Nature, Cham, Switzerland.
DOI: 10.1007/978-3-030-35713-9
- Oishi, Y., Sakamoto, N., 2021. Optimal sampled-data control of a nonlinear system.
DOI: 10.48550/arXiv.2112.14507
- Zhao, Y.-B., Sun, X.-M., Zhang, J., Shi, P., 2015. *Networked control systems: The communication basics and control methodologies*. Math. Probl. Eng. 2015, 1–9.
DOI: 10.1155/2015/639793