

Jornadas de Automática

Identificación de parámetros en cavidades cuánticas abiertas

Aitor Molina^{a,*}, Juan I. Mulero-Martínez^b, Alfonso Baños^a

^aDpto. de Informática y Sistemas, Universidad de Murcia, 30100, Murcia, España.

^bDpto. de Automática, Ingeniería Eléctrica y Tecnología Electrónica, Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, España.

To cite this article: Molina, A, Baños, A, Mulero-Martínez, J.I. 2026. Parameter identification in open quantum cavities. *Jornadas de Automática*, 47. <https://doi.org/10.17979/ja-cea.2026.47.13712>

Resumen

La caracterización del ruido ambiental en sistemas cuánticos abiertos es un desafío clave en tecnologías cuánticas. En este trabajo, se aborda este problema a través de un marco en el dominio de la frecuencia basado en series de Volterra que permite describir la dinámica mediante funciones de respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs).

Se demuestra que la excitación de dos tonos genera mezclas espectrales que contienen información tanto de los parámetros del sistema como del ruido ambiental, posibilitando su estimación simultánea incluso en presencia de ruido experimental.

Los resultados establecen la mezcla espectral no lineal como una herramienta eficaz para inferir propiedades del sistema y del entorno a partir de medidas frecuenciales.

Palabras clave: Estimación de parámetros, Sistemas no lineales, Control de sistemas cuánticos, Identificación, Ruido

Parameter identification in open quantum cavities

Abstract

Characterizing environmental noise in open quantum systems is a key challenge in quantum technologies. In this work, this problem is addressed through a frequency-domain framework based on Volterra series, which enables the description of the dynamics by means of generalized frequency response functions (GFRFs).

We show that two-tone excitation generates spectral mixing components containing information about both the system parameters and the environmental noise, enabling their simultaneous estimation even in the presence of experimental noise.

Our results establish nonlinear spectral mixing as an effective tool for inferring properties of both the system and the environment from frequency-domain measurements.

Keywords: Parameter estimation, Nonlinear systems, Quantum control systems, Identification, Noise

1. Introducción

Desde la proposición de que la computación cuántica podía ser realizable en plataformas físicas, Cirac and Zoller (1995), diversas han sido las aplicaciones en las que se ha probado que pueden tener cabida estas ideas, desde computación e información cuántica, metrología cuántica, hasta aplicaciones en química o medicina, Nielsen and Chuang (2010); Katsumi et al. (2025). Sin embargo, todas las plataformas (independientemente de la aplicación), comparten limitaciones

fundamentales en su implementación. Entre estas limitaciones, destaca la dificultad para cuantificar el ruido que el entorno induce sobre el sistema, Ding et al. (2025).

En concreto, el ruido que el entorno hace sobre los sistemas cuánticos es el responsable de la dificultad para aislarlos y manipularlos apropiadamente. Aunque caracterizar o estimar dicho ruido es una limitación fundamental debido a la dificultad intrínseca que conlleva realizar medidas sobre estos sistemas, trabajos recientes, Ding et al. (2025), proponen estrategias que permiten controlar de manera robusta sistemas

*Autor para correspondencia: aitor.molinat@um.es

cuánticos en desconocimiento del ruido. Aún con ello, ser capaces de estimar el ruido que el entorno induce en el sistema, haría posible tanto un mejor entendimiento de la naturaleza de las plataformas cuánticas, así como el desarrollo de estrategias de control que se basen en el aprovechamiento de dicha perturbación. En concreto, la ingeniería de reservorios, Poyatos et al. (1996), lo aprovecha activamente en el control.

En este trabajo, abordamos este problema proponiendo un método que permite estimar el ruido del entorno y también parámetros clave e intrínsecos del sistema. Estudiamos sistemas típicos de experimentos de óptica cuántica, Lewenstein et al. (2013), en concreto, cavidades fotónicas, que son una de las plataformas utilizadas en la implementación de tecnologías cuánticas, Nielsen and Chuang (2010). Para ello y aprovechando el carácter no lineal efectivo de la dinámica gobernada por la ecuación de Lindblad, Lindblad (1975), introducimos una descripción en el dominio de la frecuencia basada en series de Volterra y funciones respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs), Stamenova et al. (2025); Boyd et al. (1984). Esta es una herramienta que se adapta naturalmente a este tipo de sistemas y cuyo estudio escasea en la literatura.

Desde una perspectiva entrada-salida del sistema, la estructura de las GFRFs obtenidas (que de manera exacta, quedan truncadas a segundo orden), permite establecer una relación entre parámetros clave del sistema, el ruido del entorno, y la amplitud de pulsos controlables aplicados a la cavidad. Además, estas funciones permiten predecir y explicar fenómenos frecuenciales relevantes, como mezclas de frecuencias e intermodulación.

Finalmente, inspirados en trabajos recientes de espectroscopía, Biznàrová et al. (2024), proponemos un esquema experimental basado en la aplicación de pulsos de dos tonos y en la medida de un observable del sistema, a partir del cual es posible inferir numéricamente tanto el ruido ambiental como parámetros intrínsecos de la cavidad. Nuestros resultados muestran una estimación robusta incluso en presencia de ruido experimental. La principal contribución de este trabajo es el desarrollo de un método sistemático para inferir propiedades del entorno en cavidades fotónicas abiertas mediante el formalismo de las series de Volterra y de las GFRFs, todavía escasamente explorado en la literatura de tecnologías cuánticas.

2. Preliminares

2.1. Sistema físico

El sistema físico que motiva este trabajo es una cavidad fotónica abierta al entorno, típica en experimentos de óptica cuántica y electrodinámica cuántica (QED), Lewenstein et al. (2013); Haroche and Raimond (2006). En concreto, se inspira en los desarrollos experimentales y teóricos de Serge Haroche, David Wineland, Pierre Rouchon y colaboradores (que valieron el premio Nobel de física en 2012, Haroche and Raimond (2006); Rouchon (2022); Zhou et al. (2012)). De forma general, una cavidad puede modelarse como un sistema cuántico abierto cuya dinámica en régimen Markoviano viene dada por la ecuación maestra de Gorini-Kossakowski-Lindblad-Sudarshan (ver Haroche and Raimond (2006) para los detalles):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] + \mathcal{D}[\hat{\rho}(t)], \quad (1)$$

donde se ha utilizado el sistema natural de unidades ($\hbar = c = e = 1$), $\hat{\rho}$ es el estado del sistema (matriz de densidad), y $[A, B] = AB - BA$ define el conmutador de dos operadores. $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano del sistema, que contiene toda la información dinámica del mismo. En concreto y en nuestro caso, $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_\varepsilon(t)$, donde $\hat{H}_0 = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es el Hamiltoniano de la cavidad (es un oscilador armónico y representa la dinámica natural de la misma en ausencia de entradas. $\hat{a}$ describe la aniquilación de fotones y $\hat{a}^\dagger$ la creación de fotones en la cavidad) y $\hat{H}_\varepsilon(t) = \varepsilon(t)^* \hat{a}^\dagger + \varepsilon(t) \hat{a}$ es el término asociado con la entrada externa y controlable $\varepsilon(t)$ que representa un campo electromagnético, Korsch (2019). $\mathcal{D}$ denota el superoperador disipador, definido como:

$$\mathcal{D}[\hat{\rho}(t)] = \sum_{j=1}^N \gamma_j \left(\hat{L}_j \hat{\rho} \hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{L}_j^\dagger \hat{L}_j) \right). \quad (2)$$

Los parámetros γ_j ($j = 1, \dots, N$) caracterizan el acoplo del sistema con su entorno y, por tanto, describen la contribución disipativa de la dinámica. Cada uno de los γ_j representa una contribución distinta de ruido. La estimación precisa de estos parámetros en plataformas experimentales reales resulta fundamental para el diseño de estrategias de control cuántico. Los operadores $\hat{L}_j$ y $\hat{L}_j^\dagger$ describen cómo afecta esa contribución de ruido al estado del sistema $\hat{\rho}$.

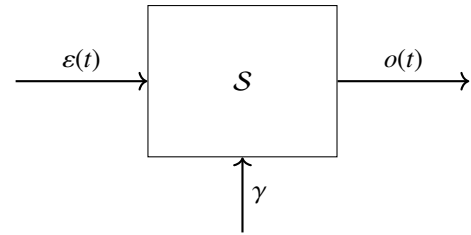


Figura 1: Sistema cuántico desde una perspectiva entrada-salida. El sistema $\mathcal{S}$ (cuyo estado es la matriz densidad $\hat{\rho}(t)$) es excitado por un campo electromagnético $\varepsilon(t)$ y está sujeto a la influencia del entorno, caracterizada por los parámetros γ . La salida corresponde a la medición de un observable físico $o(t)$.

Desde el punto de vista entrada-salida (ver Figura 1) la cavidad puede entenderse como un sistema cuántico excitado por una entrada $\varepsilon(t)$ que modela un campo electromagnético aplicado, y cuya dinámica está sujeta a la influencia del entorno γ . La salida del sistema se corresponde con un observable físico medible $o(t)$, que en el caso de nuestro sistema (al igual que en los trabajos de Haroche y colaboradores, Haroche and Raimond (2006); Zhou et al. (2012)), es el número medio de fotones en la cavidad $o(t) = \langle \hat{n}(t) \rangle := n(t)$.

2.2. Dinámica reducida

Con el objetivo de identificar las no linealidades de la dinámica de $n(t)$ inducidas por la entrada $\varepsilon(t)$, reescribimos la dinámica del sistema (Ecuación (1)) en términos de valores esperados (promedios temporales). Para ello, consideramos ruido con el entorno de manera que este induzca la pérdida y

ganancia de fotones espontánea en la cavidad. Esto se traduce en la presencia de operadores $\hat{L}_1 = \hat{a}$ y $\hat{L}_2 = \hat{a}^\dagger$ en el disipador (2). Convenientemente, definimos el número estacionario de fotones en la cavidad en ausencia de entradas $\bar{n} = \frac{\nu}{\mu-\nu} = \frac{\nu}{2\gamma}$ donde μ, ν denotan respectivamente la pérdida y ganancia de fotones inducida por el entorno, Korsch (2019). Además, se define con ello $\gamma = \frac{1}{2}(\mu - \nu)$, tal que $\mu > \nu$ para garantizar estabilidad y positividad de $\bar{n}$.

Todo ello permite reescribir la ecuación (1) como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & -i[\hat{H}_0 + \hat{H}_\varepsilon, \hat{\rho}] \\ & + \frac{\mu}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & + \frac{\nu}{2}(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3)$$

Definiendo los valores esperados $\langle \hat{n}(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}] \equiv n(t)$, $\langle \hat{a}(t) \rangle = x(t) + iy(t)$ ($i = \sqrt{-1}$ y por tanto $\langle \hat{a}^\dagger \rangle = x(t) - iy(t)$), se obtiene el siguiente sistema dinámico (dinámica en número medio y oscilaciones en cuadratura):

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \nu - 2\gamma n + 2\varepsilon y, \\ \frac{dx}{dt} = -\gamma x + \omega_0 y, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y - \omega_0 x + \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

donde hemos supuesto $\varepsilon(t)$ real. De este sistema se identifica una no linealidad de tipo producto y de segundo orden $u = 2\varepsilon y$, que introduce un comportamiento no lineal en la dinámica del observable $n(t)$. Una descomposición en subsistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) conectados a través de un término no lineal permite entender el impacto de la no linealidad u en la dinámica del observable $n(t)$ (ver Figura 2).

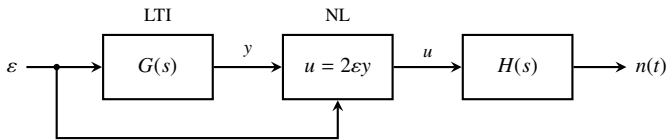


Figura 2: Representación en diagrama de bloques del sistema no lineal (4). El sistema se descompone en dos subsistemas LTI, $G(s)$ y $H(s)$, interconectados a través de una no linealidad bilineal $u = 2\varepsilon y$.

Así, definimos las funciones de transferencia en el dominio de Laplace:

$$G(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \gamma)^2 + \omega_0^2}, \quad H(s) = \frac{1}{s + 2\gamma} \quad (5)$$

3. Funciones respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs) del sistema

3.1. Funciones de respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs)

Las funciones de respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs) constituyen una extensión de orden superior de las

funciones de respuesta en frecuencia y pueden obtenerse mediante análisis de sondeo armónico (consistente en excitar un sistema mediante señales de distintas frecuencias para estudiar su respuesta y caracterizar sus propiedades en el dominio frecuencial). Se recomienda ir a Stamenova et al. (2025); Boyd et al. (1984) para los detalles.

Para un sistema no lineal (como lo es (4)), se representan las señales de entrada y salida mediante una expansión en series de Volterra y, posteriormente, se realiza un análisis espectral (en el dominio de la frecuencia) para separar las contribuciones asociadas a los distintos órdenes no lineales. Este marco permite identificar y cuantificar la contribución armónica generada por cada orden de no linealidad. Por ejemplo, en (4), la no linealidad es de segundo orden $2\varepsilon y$.

Sea $u(t)$ la señal de entrada de un sistema no lineal e $y(t)$ su salida. La representación mediante series de Volterra descompone la salida como

$$y(t) = \sum_{p=0}^m y^{(p)}(t), \quad (6)$$

donde, sin pérdida de generalidad, se toma $y^{(0)}(t) = 0$, ya que el término de orden cero corresponde a una componente constante. Aquí notar que $^{(p)}$ hace referencia al orden de la no-linealidad.

De manera análoga, la entrada puede escribirse como

$$u(t) = \sum_{q=0}^n u^{(q)}(t), \quad (7)$$

donde igual que para la salida, $^{(q)}$ hace referencia al orden de la no-linealidad.

Definiendo la transformada de Fourier de cada contribución, se obtiene

$$Y(\omega) = \sum_{p=0}^m Y^{(p)}(\omega), \quad U(\omega) = \sum_{q=0}^n U^{(q)}(\omega). \quad (8)$$

La contribución de orden m a la salida viene dada por el núcleo de Volterra de orden m , $h^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_m)$:

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_m) \\ & \times \prod_{p=1}^m u(t - \tau_p) d\tau_1 \dots d\tau_m. \end{aligned} \quad (9)$$

$h^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ representa la respuesta impulsional de orden m .

En el dominio de la frecuencia, el espectro de salida de orden m viene dado por

$$\begin{aligned} Y^{(m)}(\omega) = & \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \sum_{p=1}^m \omega_p\right) \\ & \times H^{(m)}(\omega_1, \dots, \omega_m) \prod_{p=1}^m U(\omega_p) d\omega_1 \dots d\omega_m, \end{aligned} \quad (10)$$

donde las funciones $H^{(m)}(\omega_1, \dots, \omega_m)$ son las GFRFs, que codifican la relación entrada-salida de orden superior en el dominio frecuencial.

Por definición, $H^{(m)}$ es la transformada de Fourier m -dimensional del núcleo de Volterra:

$$H^{(m)}(\omega_1, \dots, \omega_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h^{(m)}(\tau_1, \dots, \tau_m) \times e^{-i(\sum_{p=1}^m \omega_p \tau_p)} d\tau_1 \dots d\tau_m. \quad (11)$$

3.2. GFRFs para la cavidad cuántica

Obtenemos las GFRFs para el sistema (4) considerando una entrada general de la forma $\varepsilon(t) = B + \tilde{\varepsilon}(t)$ donde B es un sesgo constante (útil en generación de estados coherentes, relevantes en óptica cuántica, Lewenstein et al. (2013)) y $\tilde{\varepsilon}(t)$ es una perturbación de media nula. El caso sin sesgo se recupera como caso particular poniendo $B = 0$. Obsérvese que debido a la no linealidad de segundo orden $u = 2\varepsilon y$, solo aparecerán GFRFs hasta segundo orden. Con ello, se trunca la expansión de Volterra en las señales de entrada y salida a segundo orden.

Trabajamos en el punto de operación (derivadas nulas en (4)) asociado con la entrada B tal que $x_0 = \frac{B\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2}$, $y_0 = \frac{\gamma x_0}{\omega_0}$ y $n_0 = \frac{\gamma}{2\gamma} + \frac{B^2}{\gamma^2 + \omega_0^2}$. Descomponiendo las variables alrededor del punto de operación se tiene que $n(t) = n_0 + \tilde{n}(t)$, $\varepsilon(t) = B + \tilde{\varepsilon}(t)$, $x(t) = x_0 + \tilde{x}(t)$, $y(t) = y_0 + \tilde{y}(t)$. De ese modo, se trabaja sobre la dinámica perturbada del número medio de fotones:

$$\dot{\tilde{n}} = -2\gamma\tilde{n} + 2B\tilde{y} + 2y_0\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}\tilde{y}. \quad (12)$$

3.2.1. GFRF de segundo orden

La componente de segundo orden satisface que:

$$\dot{\tilde{n}}^{(2)} = -2\gamma\tilde{n}^{(2)} + 2\tilde{\varepsilon}\tilde{y}^{(1)}. \quad (13)$$

Tomando la transformada de Fourier en (12), teniendo en cuenta las transferencias de (5) y comparando con la ecuación (10) para $m = 2$ se obtiene que:

$$H^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{2}{i(\omega_1 + \omega_2) + 2\gamma} \frac{i\omega_2 + \gamma}{(i\omega_2 + \gamma)^2 + \omega_0^2}. \quad (14)$$

Mediante simetrización estándar, puede obtenerse una versión simétrica equivalente (y que por comodidad, renombramos por $H_{\text{sym}}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) := H^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$):

$$H^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \frac{G(\omega_1) + G(\omega_2)}{i(\omega_1 + \omega_2) + 2\gamma}, \quad (15)$$

donde se simplifica la escritura para $G(s = i\omega) := G(\omega)$.

3.2.2. GFRF de primer orden

Dado que el caso relevante para el método que se propone en este trabajo de identificación de parámetros es el caso sin sesgo, tomamos $B = 0$ (y por tanto $y_0 = 0$) en (12). De ese modo, vemos cómo trivialmente no aparecen componentes a segundo orden, y resulta comparando con (10) para $m = 1$ que:

$$H^{(1)}(\omega) = 0. \quad (16)$$

De ese modo, las ecuaciones (15) y (16) constituyen las GFRFs del sistema.

4. Identificación de parámetros. Espectroscopía de dos tonos

La estructura de las ecuaciones (15) y (16) resulta especialmente relevante para el problema de identificación de parámetros, y en particular, para la cuantificación del ruido que el entorno induce en el sistema. En ausencia de sesgo ($B = 0$), la contribución de primer orden desaparece y la dinámica espectral de la salida queda determinada exclusivamente por la GFRF de segundo orden.

Dado que la estructura espectral de $n(t)$ está completamente determinada por la expresión (15), la medición del número medio de fotones permite, en principio, inferir componentes espectrales que dependen explícitamente de los parámetros γ y ω_0 .

Esta observación motiva el enfoque propuesto en este trabajo: aplicar una excitación de dos tonos, medir $n(t)$ mediante protocolos experimentales apropiados (como el que se explica en Rouchon (2022)) y, a partir de dicha medida, estimar los parámetros γ y ω_0 utilizando la GFRF de segundo orden.

4.1. Armónicos e intermodulación. Firma espectral de γ y ω_0

Sea la entrada a la cavidad de la forma

$$\varepsilon(t) = A_1 e^{i\Omega_1 t} + A_2 e^{i\Omega_2 t}, \quad (17)$$

cuya transformada de Fourier viene dada por

$$E(\omega) = 2\pi (A_1 \delta(\omega - \Omega_1) + A_2 \delta(\omega - \Omega_2)). \quad (18)$$

Si $n(t)$ denota la salida del sistema, correspondiente al número medio de fotones, y dado que en el caso no sesgado se cumple $H^{(1)}(\omega) = 0$, la contribución espectral dominante proviene del segundo orden:

$$N^{(2)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int E(\omega_1) E(\omega_2) H^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (19)$$

Las integrales se extienden a toda la recta real. Nótese además que los productos de distribuciones delta que aparecen a continuación están bien definidos, ya que actúan sobre variables independientes, ω_1 y ω_2 .

Expandiendo el producto $E(\omega_1)E(\omega_2)$ se obtiene

$$E(\omega_1)E(\omega_2) = (2\pi)^2 (A_1^2 \delta(\omega_1 - \Omega_1) \delta(\omega_2 - \Omega_1) + A_1 A_2 \delta(\omega_1 - \Omega_1) \delta(\omega_2 - \Omega_2) + A_1 A_2 \delta(\omega_1 - \Omega_2) \delta(\omega_2 - \Omega_1) + A_2^2 \delta(\omega_1 - \Omega_2) \delta(\omega_2 - \Omega_2)). \quad (20)$$

Sustituyendo en la expresión (19) y aplicando las propiedades integrales de la delta de Dirac, se tiene que la transformada de la salida es:

$$N^{(2)}(\omega) = 2\pi [A_1^2 H^{(2)}(\Omega_1, \Omega_1) \delta(\omega - 2\Omega_1) + A_2^2 H^{(2)}(\Omega_2, \Omega_2) \delta(\omega - 2\Omega_2) + 2A_1 A_2 H^{(2)}(\Omega_1, \Omega_2) \delta(\omega - (\Omega_1 + \Omega_2))]. \quad (21)$$

Esta expresión muestra de manera explícita la aparición de armónicos de segundo orden, en las frecuencias $2\Omega_1$ y $2\Omega_2$, así como de un término de intermodulación en la frecuencia suma $\Omega_1 + \Omega_2$.

Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtiene la señal temporal:

$$\begin{aligned} n^{(2)}(t) = & A_1^2 \frac{2G(\Omega_1)}{i2\Omega_1 + 2\gamma} e^{i2\Omega_1 t} \\ & + A_2^2 \frac{2G(\Omega_2)}{i2\Omega_2 + 2\gamma} e^{i2\Omega_2 t} \\ & + 2A_1 A_2 \frac{G(\Omega_1) + G(\Omega_2)}{i(\Omega_1 + \Omega_2) + 2\gamma} e^{i(\Omega_1 + \Omega_2)t}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde las amplitudes contienen la firma de γ y ω_0 .

4.2. Entradas cosenoidales

En la práctica, las excitaciones físicas son reales, por lo que resulta natural considerar entradas de la forma

$$\varepsilon(t) = \frac{A_1}{2}(e^{i\Omega_1 t} + e^{-i\Omega_1 t}) + \frac{A_2}{2}(e^{i\Omega_2 t} + e^{-i\Omega_2 t}), \quad (23)$$

en cuyo caso el espectro contiene cuatro deltas, lo que genera términos adicionales de mezcla de frecuencias. Sobre esta base, proponemos un esquema de identificación basado en demodulación.

4.3. Extracción de los coeficientes espectrales

El modelo matemático anterior predice que la contribución de segundo orden puede escribirse como

$$\begin{aligned} n^{(2)}(t) = & 2|C_{11}| \cos(2\Omega_1 t + \phi_{11}) \\ & + 2|C_{22}| \cos(2\Omega_2 t + \phi_{22}) \\ & + 2|C_{12}| \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t + \phi_{12}). \end{aligned} \quad (24)$$

donde $C_{11} = A_1^2 H^{(2)}(\Omega_1, \Omega_1)$, $C_{22} = A_2^2 H^{(2)}(\Omega_2, \Omega_2)$, $C_{12} = 2A_1 A_2 H^{(2)}(\Omega_1, \Omega_2)$, y ϕ_{11} , ϕ_{22} y ϕ_{12} denotan las fases de los coeficientes espectrales correspondientes.

Para estimar dichos coeficientes a partir de la señal medida, se emplea una demodulación tipo *lock-in*, basada en la proyección de $n(t)$ sobre la base ortogonal $\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$ (véase Biznàrová et al. (2024); Giessibl (2003)). En particular, se definen las cantidades

$$I(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cos(\omega t) dt, \quad (25)$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \sin(\omega t) dt. \quad (26)$$

Los coeficientes complejos estimados se reconstruyen entonces como

$$C(\omega) = I(\omega) - iQ(\omega). \quad (27)$$

donde ω se refiere a la frecuencia de interés (de entrada) a demodular. En el presente problema, las frecuencias de interés son

$$\omega_{\alpha\beta} \in \{2\Omega_1, 2\Omega_2, \Omega_1 + \Omega_2\},$$

donde $\alpha\beta$ denota compactamente los subíndices 11, 12 y 22. Así, resulta más conveniente escribir:

$$C_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} - iQ_{\alpha\beta}, \quad (28)$$

con

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cos(\omega_{\alpha\beta} t) dt, \quad (29)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \sin(\omega_{\alpha\beta} t) dt. \quad (30)$$

De ese modo, el objetivo es estimar los coeficientes C_{11} , C_{12} y C_{22} . Equivalentemente, la demodulación *lock-in* puede entenderse como el cálculo de coeficientes de Fourier complejos sobre una ventana temporal finita:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) e^{-i\omega_{\alpha\beta} t} dt. \quad (31)$$

Aquí, T representa el tiempo total de medida. En general, valores mayores de T mejoran la selectividad frecuencial del procedimiento de demodulación.

4.4. Construcción del problema de estimación

Supóngase ahora que, a partir de la señal medida, se obtienen los coeficientes espectrales $\hat{C}_{11}$, $\hat{C}_{22}$ y $\hat{C}_{12}$. Por otro lado, el modelo analítico predice unos coeficientes C_{11} , C_{22} y C_{12} que dependen de los parámetros desconocidos γ y ω_0 .

Se define la diferencia compleja:

$$r_{\alpha\beta}^{(k)} = C_{\alpha\beta}^{(k)} - \hat{C}_{\alpha\beta}^{(k)}(\gamma, \omega_0). \quad (32)$$

El índice k etiqueta distintos experimentos realizados con diferentes entradas $\varepsilon(t)$ (es decir, con diferentes valores de amplitud A y frecuencia ω).

Cada experimento k queda caracterizado entonces por el conjunto de parámetros

$$(\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, A_1^{(k)}, A_2^{(k)}). \quad (33)$$

Con ello, se introduce la función de coste real para K experimentos:

$$\mathcal{J}(\gamma, \omega_0) = \sum_{k=1}^K (|r_{11}^{(k)}|^2 + |r_{22}^{(k)}|^2 + |r_{12}^{(k)}|^2). \quad (34)$$

El problema de identificación se formula entonces como

$$(\hat{\gamma}, \hat{\omega}_0) = \arg \min_{\gamma, \omega_0} \mathcal{J}(\gamma, \omega_0). \quad (35)$$

Geoméricamente, cada experimento genera un punto en $\mathbb{C}^3$, mientras que el modelo define una variedad parametrizada por (γ, ω_0) . El procedimiento de estimación consiste en encontrar el punto de dicha variedad más próximo a los datos experimentales. El problema es localmente identificable, puesto que se verificó numéricamente que el Jacobiano J del mapeo $(C_{11}, C_{12}, C_{22}) \rightarrow (\hat{\gamma}, \hat{\omega}_0)$ alcanza rango máximo en el caso analizado ($\text{rank}(J) = 2$). Además, el número de condición $\kappa(J) = \frac{\sigma_{\max}(J)}{\sigma_{\min}(J)} = 4,37$ evidencia un condicionamiento moderado, corroborando así la identificabilidad local del sistema.

5. Caso de estudio: estimación de parámetros

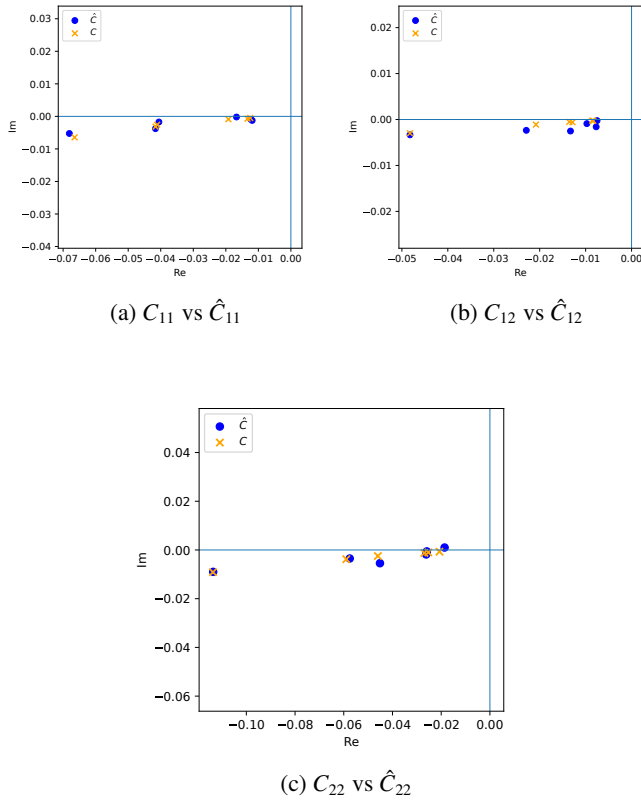


Figura 3: Comparación en el plano complejo de los coeficientes medidos $\hat{C}_{11}$, $\hat{C}_{12}$ y $\hat{C}_{22}$ (puntos azules) con los coeficientes del modelo C_{11} , C_{12} y C_{22} (cruces amarillas) en el caso de estimación ruidosa $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma = 0,2)$.

Como caso de estudio para probar el algoritmo, simulamos $K = 6$ experimentos caracterizados por las señales de entrada $(\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, A_1^{(k)}, A_2^{(k)})$ correspondientes a valores de $(4,0, 6,0, 1,0, 1,3)$, $(5,0, 7,0, 1,0, 1,0)$, $(6,0, 8,0, 1,2, 0,9)$, $(7,0, 9,5, 0,8, 1,1)$, $(8,0, 11,0, 1,1, 1,0)$, $(9,0, 13,0, 1,0, 1,2)$ en el sistema natural de unidades (donde tanto las amplitudes como las frecuencias tienen unidades de energía), y fijamos además como parámetros verdaderos $\gamma = 0,2$ y $\omega_0 = 1$. Seleccionamos un tamaño de ventana lo suficientemente grande, en concreto se escoge un $T = 10$ unidades de tiempo.

Para comprobar que el algoritmo es robusto, escogemos un escenario con ruido $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ en la medida $(n_{\text{medida}}(t) = n(t) + \eta(t))$ con $\sigma = 0,2$. Notar que se han de escoger valores iniciales de $\hat{\gamma}$ y $\hat{\omega}_0$ para que el algoritmo empiece a funcionar. En concreto, escogemos $\hat{\gamma} = 5$ y $\hat{\omega}_0 = 15$ como valores iniciales estimados.

Como métricas de rendimiento, obtenemos: (i) una comparación en el plano complejo de los coeficientes medidos $\hat{C}_{11}$, $\hat{C}_{12}$, $\hat{C}_{22}$ con los coeficientes del modelo (los verdaderos) C_{11} , C_{12} , C_{22} , (ii) y a modo de completitud se imprime el valor del coste para los parámetros $\hat{\gamma}$, $\hat{\omega}_0$ iniciales y el valor del costo para los parámetros óptimos encontrados.

Se obtiene un coste inicial (para $\hat{\gamma} = 5$, $\hat{\omega}_0 = 15$) de $\mathcal{J} = 4,17 \times 10^{-2}$, y para los valores óptimos encontrados $\hat{\gamma} = 0,18$, $\hat{\omega}_0 = 1,03$ un coste de $\mathcal{J} = 5,81 \times 10^{-5}$.

Los resultados se muestran en la Figura 3. A pesar de existir ruido en la medida, el método propuesto hace que los parámetros se recuperen con buena precisión. En concreto, se obtiene para las métricas de error absoluto ($e_\gamma = |\gamma - \hat{\gamma}|$, $e_{\omega_0} = |\omega_0 - \hat{\omega}_0|$) unos valores de $e_\gamma = 0,019$ y $e_{\omega_0} = 0,03$, evidenciando lo satisfactorios que son los resultados incluso en presencia de ruido experimental.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un método para la identificación de parámetros en cavidades cuánticas abiertas basado en funciones de respuesta en frecuencia generalizadas (GFRFs). El enfoque permite estimar tanto el ruido del entorno como parámetros intrínsecos del sistema a partir de medidas experimentales mediante excitaciones de dos tonos.

Los resultados validan la robustez del método ante ruido y el potencial de la identificación no lineal en sistemas cuánticos abiertos. Futuras líneas incluyen análisis Monte Carlo (robustez del identificador) y su extensión a otros sistemas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo de los proyectos PID2020-112709RB-C22 y PID2023-149066NB-I00, financiados por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

Referencias

- Biznárová, J., Rivera-Hernández, J. C., Forchheimer, D., Bylander, J., Haviland, D. B., Andersson, G., 2024. Intermodulation spectroscopy and the nonlinear response of two-level systems in superconducting coplanar-waveguide resonators. *Physical Review Applied* 22, 014063. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.22.014063
- Boyd, S., Chua, L. O., Desoer, C. A., 1984. Analytical foundations of volterra series. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 1, 243–282.
- Cirac, J. I., Zoller, P., 1995. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.* 74, 4091–4094.
- Ding, L., Fan, J., Qiu, X., 2025. Universally robust control of open quantum systems. *npj Quantum Information*.
- Giessibl, F. J., 2003. Advances in atomic force microscopy. *Reviews of Modern Physics* 75, 949–983.
- Haroche, S., Raimond, J.-M., 2006. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford University Press, Oxford.
- Katsumi, R., Takada, K., Kawai, K., Sato, D., Yatsui, T., 2025. High-sensitivity nanoscale quantum sensors based on a diamond micro-resonator. *Communications Materials* 6, 49. DOI: 10.1038/s43246-025-00770-x
- Korsch, H. J., 2019. Lindblad dynamics of the damped and forced quantum harmonic oscillator. *arXiv preprint arXiv:1908.01187*.
- Lewenstein, M., Sanpera, A., Ahufinger, V. (Eds.), 2013. *The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light, Book II: Quantum Optical Devices*. Imperial College Press, London.
- Lindblad, G., 1975. Completely positive maps and entropy inequalities. *Communications in Mathematical Physics* 40, 147–151.
- Nielsen, M. A., Chuang, I. L., 2010. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Poyatos, J. F., Cirac, J. I., Zoller, P., 1996. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters* 77, 4728–4731. DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.4728
- Rouchon, P., 2022. A tutorial introduction to quantum stochastic master equations based on the qubit-photon system. *arXiv preprint arXiv:2208.07416*.
- Stamenova, D., Abbiati, G., Sauder, T., 2025. Numerical estimation of generalized frequency response functions from time series data using narx. *Mechanical Systems and Signal Processing* 239, 113278.
- Zhou, X., et al., 2012. Field locked to a fock state by quantum feedback with single-photon corrections. *Physical Review Letters* 108, 243602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.243602