REVISTA DE ESTUDIOS E INVESTIGACIÓN
EN PSICOLOGÍA Y EDUCACIÓN
eISSN: 2386-7418
2023, Vol. 10, No. 1, 38-60.
DOI: https://doi.org/10.17979/reipe.2023.10.1.9389

UDC / UMinho

Procesos de análisis para resolver problemas de razonamiento cuantitativo: Un estudio de respuestas de estudiantes

Analysis processes for solving quantitative reasoning problems: A study of student responses

Mónica Mora-Badilla https://orcid.org/0000-0002-3165-4037
Luis Rojas-Torres https://orcid.org/0000-0002-9085-2703

Instituto de Investigaciones Psicológicas, Facultad de Ciencias Sociales. Universidad de Costa Rica: https://iip.ucr.ac.cr/
San José – Costa Rica

Correspondencia relativa a este artículo: Mónica Mora Badilla – monica.morabadilla@ucr.ac.cr

Resumen

Este trabajo presenta un estudio descriptivo, transversal y cualitativo de los procedimientos de resolución de problemas utilizados por un grupo de estudiantes universitarios de primer curso en respuesta a un conjunto específico de problemas de razonamiento cuantitativo (RC). El objetivo de la investigación es analizar las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados para evaluar su rendimiento en razonamiento cuantitativo y determinar si se ajusta al constructo esperado, según el cual los problemas de RC están asociados a los procesos de análisis necesarios para su resolución (a saber, generalización, ejemplificación y validación). La muestra para el estudio consistió en un grupo de 20 estudiantes universitarios de primer curso (edad media 19,85 ± 0,81 años). Los datos se obtuvieron a partir de una única recogida de datos de cada participante en forma de entrevista cognitiva durante la realización de una prueba de acceso a la universidad que constaba de ocho problemas de RC. Previamente a la realización de la prueba, los problemas fueron evaluados por expertos y asociados a una serie de procesos y procedimientos de análisis (categorías de análisis) necesarios para su resolución. El análisis de las entrevistas mediante protocolos de pensamiento en voz alta reveló que los procedimientos asociados a cada proceso de análisis coincidían en la mayoría de los casos con los procesos y procedimientos previstos por los expertos. Las conclusiones del estudio ofrecen valiosas perspectivas para los desarrolladores de pruebas de evaluación RC.

Palabras clave: razonamiento cuantitativo; matemáticas; solución de problemas; generalización; alumnado universitario

Abstract

This work presents a descriptive, cross-sectional, qualitative study of the problem-solving procedures used by a group of first-year university students in response to a specific set of quantitative reasoning (QR) problems. The aim of the research is to analyze the students' responses to the problems posed in order to assess their quantitative reasoning performance and determine if it matches the expected construct, according to which QR problems are associated with the analysis processes necessary for their resolution (namely, generalization, exemplification and validation). The sample for the study consisted of a group of 20 first-year university students (mean age 19.85 ± 0.81 years). The data were obtained from a single data collection from each subject in the form of a cognitive interview during the completion of a university admissions test comprising eight QR problems. Prior to testing, the problems were assessed by experts and associated with a series of analysis processes and procedures (analysis categories) necessary for their resolution. The think-aloud protocol analysis of the interviews revealed that the procedures associated with each analysis process coincided in most instances with the processes and procedures predicted by the experts. The findings of the study offer valuable insights for QR assessment test developers.

Keywords: quantitative reasoning; mathematics; problem solving; generalization; university students

e-ISSN 2386-7418

Como parte del estudio de las funciones cognitivas superiores, específicamente el razonamiento para la resolución de problemas es fundamental conocer cuáles son los procesos que realizan los individuos para obtener la respuesta de los enunciados. Esto se debe a que los constructores de problemas pueden considerar que el proceso de solución requerido en un problema es muy complejo o ingenioso, pero los sujetos pueden utilizar alguna estrategia no considerada por los constructores, como la reproducción de un algoritmo memorizado o algún truco basado en el formato de la pregunta. Las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver los problemas que componen una prueba son parte de las evidencias requeridas para justificar las inferencias que se deriven de su aplicación (AERA, APA, NCME, 2014), además conocer con detalle la forma en la que los estudiantes resuelven los problemas permite determinar si se adecúan al propósito teórico para el cual fueron elaborados.

Un tipo particular de razonamiento matemático es el razonamiento cuantitativo (RC), definido como "la habilidad para analizar información cuantitativa y determinar cuáles procedimientos pueden ser aplicados a un problema para determinar su solución" (Dwyer et al., 2003, p. 1). Esta definición indica que el RC considera los procesos de análisis realizados con información cuantitativa, como organizar la información dada, realizar deducciones a partir de objetos matemáticos o integrar distintos enunciados matemáticos para desarrollar una conclusión. Además, la definición indica que el RC incluye la determinación de los procedimientos requeridos para llegar a una solución, es decir, el planteamiento de la estrategia.

Rhodes (2010) identifica seis componentes del RC: representación, comunicación, interpretación, cálculo, aplicación-análisis y generación de supuestos, los cuales tienen concordancia con los presentados en categorizaciones realizadas por otros autores (Brito, 2014; Dwyer et al. 2003; Mayes et al., 2013). No es posible elaborar problemas dirigidos específicamente a evaluar uno de estos componentes, ya que la mayoría de los problemas presentan al menos tres de ellos, aunque, se determina que la interpretación y la aplicación-análisis son inherentes a los problemas de RC, mientras los restantes componentes no necesariamente deben estar presentes.

Este trabajo se enfoca en el componente de aplicación-análisis, definido por Rhodes (2010) como la habilidad para realizar juicios y desarrollar conclusiones apropiadas basadas en el análisis cuantitativo de los datos. Considerando que la capacidad de aplicación-análisis demandada para cada problema puede presentar diferentes facetas y utilizando los nueve procesos sugeridos por Jeannotte y Kieran (2017): generalización, conjeturar, identificar un patrón, comparar, clasificar, justificar, probar, demostrar y ejemplificar. Se plantea que dentro

e-ISSN 2386-7418

del RC el componente aplicación-análisis es el que incorpora propiamente estos procesos, directamente relacionados con la acción de razonar sobre hechos matemáticos previamente identificados (en la interpretación).

En la Universidad de Costa Rica (UCR) se desarrolló la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC), dirigida a medir el RC de los aspirantes a carreras de la UCR que en los diferentes cursos de sus programas de estudio requieren de la matemática (Víquez et al., 2021). Mediante el análisis de la resolución de los problemas de RC de la PHC, los investigadores a cargo de las pruebas han identificado cuatro procesos de análisis utilizados: generalizar, ejemplificar, validar y relacionar (Víquez et al., 2021), que se diferencian en el qué hacer con la relación establecida entre los datos o para qué se utilizará dicha relación, como se puede ver en las siguientes definiciones.

1. El proceso de *generalizar* demanda inferir una relación recursiva entre cantidades u objetos matemáticos de una secuencia dada, con la cual se puede inferir una propiedad sobre otras cantidades u objetos matemáticos que estarían en la secuencia, pero los cuales no han sido dados (Jeannotte y Kieran, 2017; Cañadas et al., 2007; Stylianides, 2008). Este proceso se asocia al paso inicial de la construcción de enunciados matemáticos: la elaboración de conjeturas.

2. En el proceso de *validar* se busca determinar el valor de verdad de una proposición matemática no elemental por medio del análisis riguroso de la proposición (Cabassut, 2005; Cañadas et al., 2007; Lithner, 2008). En el caso de la búsqueda intencionada de contraejemplos, se realiza un procedimiento justificado que pueda llevar a la construcción de un contraejemplo, lo cual va más allá de generar ejemplos de forma aleatoria. Por otro lado, para llegar a la veracidad de una proposición se debe realizar una justificación rigurosa de esta, basada en una secuencia de argumentos lógicos.

3. El proceso de *relacionar* se basa en plantear alguna conexión entre los objetos dados en el enunciado, con el fin de obtener piezas de información que lleven a la respuesta buscada. Una parte elemental de este proceso es establecer una representación adecuada de la relación de los objetos, la cual puede implicar diagramas, cuadros, fórmulas conocidas o traducciones de la información a lenguaje matemático u ordinario. Se considera que el proceso de relacionar se manifiesta mediante el establecimiento de relaciones entre hechos matemáticos, las cuales pueden utilizarse para construir una nueva cantidad, que puede obtenerse mediante una comparación o la covariación entre cantidades (Muzani et al., 2018; Thompson, 2010).

e-ISSN 2386-7418

4. Por último, *ejemplificar* requiere generar casos particulares de una proposición matemática no elemental (en la PHC se define una proposición matemática elemental como aquella basada en la aplicación directa de algoritmos indicados explícitamente en el enunciado, por ejemplo: analice si la ecuación $x^2+1=0$ tiene una única solución). Por medio de la generación de ejemplos es posible analizar propiedades de la proposición matemática sin el análisis específico de la proposición como un todo. Un ejemplo genérico es cuando una justificación se basa en un ejemplo concreto, visto como un representante característico de su clase, "la justificación se refiere a propiedades abstractas y elementos de una familia, pero está claramente basado en el ejemplo" (Marrades y Gutiérrez, 2000, p. 92). En el caso de encontrar algún ejemplo que no cumple una conjetura, se puede concluir que esta conjetura no es verdadera; mientras que, si se cumple para todos los casos seleccionados, se puede confiar en su veracidad (al haber sido sometida a comprobación). En ocasiones, la ejemplificación se considera un proceso auxiliar a los anteriores, puesto que puede usarse para establecer relaciones que permitan obtener una cantidad nueva o un objeto matemático, hacer una generalización o realizar una validación (Mason, 1982; Pólya, 1968).

Uno de los medios para conocer el razonamiento de los estudiantes y determinar cuál de los anteriores procesos están aplicando es la entrevista cognitiva, como "herramienta para analizar los mecanismos cognitivos involucrados en el proceso de contestar las preguntas de un cuestionario, y así detectar problemas en los distintos momentos de este proceso" (Smith-Castro y Molina, 2011, p. 6). Exponiendo a los estudiantes a la resolución de problemas por medio de protocolos de pensamiento en voz alta (*think aloud*), el cual es útil para determinar qué estrategias emplean los estudiantes, ver si coinciden con las señaladas por los expertos y si son imprescindibles para resolver correctamente los problemas (Brizuela et al., 2016). A pesar de que esta técnica puede tener algunas limitantes, ya hace tiempo que Ericcson y Simon (1980) indicaron que la aplicación de protocolos de pensamiento en voz alta no parece afectar el resultado al resolver problemas.

En este trabajo, como los problemas de RC demandan procesos de resolución distintos, aparte de analizar los problemas de RC planteados para asociarlos a los procesos de análisis requeridos, pretendemos conocer si los procesos de resolución ejecutados por los estudiantes en la PHC corresponden con los esperados, según el equipo de expertos y la teoría. Por un lado, en el caso específico de la PHC, el análisis de esta concordancia es relevante debido a que la prueba se construye con base en estos procesos y si hay una mala especificación de ellos se puede desarrollar una prueba con una sub-representación de los procesos que se pretenden

e-ISSN 2386-7418

evaluar. Por otro lado, el análisis de la concordancia es relevante para la comunidad investigadora en educación matemática porque se pueden evidenciar problemas que, según expertos en matemática, se resuelven de una forma, pero el estudiantado los aborda de otra.

Método

Participantes

La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes de primer ingreso de la Universidad de Costa Rica (UCR) que realizaron la Prueba de Habilidades Cuantitativas (PHC) como requisito de admisión. Fueron seleccionados intencionalmente, de forma no probabilística y a conveniencia, debido a que presentaron notas altas en la prueba (más de un 80% de aciertos) y, por ende, se consideró que podían dar información sobre los procesos más efectivos para la resolución de los problemas. La muestra estaba formada por 10 de varones y 10 de mujeres, con edades comprendidas entre los 19 y los 22 años (*M* = 19.85 años, *DT* = 0.81), la mitad de los cuales (5 varones y 5 mujeres) provenían de un centro público, y los restantes de un centro privado, Además, se incluyó estudiantes de diferentes partes del país, algunos del casco central (San José), otros estudiantes de las periferias (Alajuela, Cartago, Heredia) e incluso de zonas rurales (Pérez Zeledón).

Instrumento

El instrumento estuvo conformado por ocho problemas de razonamiento cuantitativo (RC), seleccionados a partir de un grupo de problemas de la PHC publicados previamente para efectos de preparación de los estudiantes, ya que los problemas utilizados en la PHC son confidenciales. Se seleccionaron de forma que se tuvieran dos problemas por cada uno de los procesos de análisis. Se presentan los problemas seleccionados para generalizar (P1, P2), validar (P3, P4), relacionar (P4, P6) y ejemplificar (P7, P8), en ese orden, para facilitar la secuencia del análisis posterior. Sin embargo, cabe mencionar que a los estudiantes no les fueron presentados en este mismo orden.

P.1 Considere la siguiente secuencia numérica:

$$u_2\left(\frac{2+1}{2}\right) \quad u_3\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right) \quad u_4=\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right) \ \dots \quad u_n=\left(\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4+1}{4}\right)\dots\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

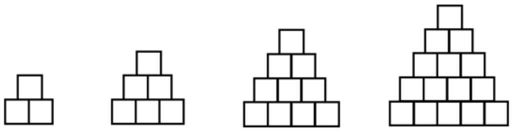
Con base en la secuencia anterior, el valor de u_{100} equivale a

A) 1^{100} B) 2^{100} C) $\frac{100}{2}$ D) $\frac{101}{2}$

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1),38-60

e-ISSN 2386-7418

P.2 Observe la siguiente secuencia de figuras, conformadas por cuadrados de lado 3cm,



Si se continúan construyendo figuras siguiendo el mismo patrón, cuál de las siguientes expresiones representa el área de la figura en la posición 15

A) 192 cm^2 B) 405 cm^2 C) 1224 cm^2 D) 1620 cm^2

P.3 Si p y m son números enteros positivos, tales que $p \div 2$ es entero y $m \div 3$ es par, entonces, con certeza,

A) $p \cdot m$ es múltiplo de 9. B) $p \cdot m$ es múltiplo de 12. C) $\frac{3p}{m}$ es entero. D) $\frac{2m}{3p}$ es par.

P.4 Considere el $\varDelta\, EPR$ rectángulo en P y los puntos Q y S, tales que $P-Q-R$, $P-S-E$, $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$ y $\overline{PS} \cong \overline{SE}$. De acuerdo con la información anterior, con certeza,

A) $EP < 2QS$ B) $QS < QR$ C) $2QS > RE$ D) $2EP > RE$

P.5 En una fábrica se tienen 25 cajas que pesan, en conjunto, 75 kg. Si el peso de una única caja se reduce en $\frac{1}{2}$ kg, entonces, con certeza, el peso promedio de las cajas sería

A) mayor a 2,5 kg, pero menor a 3 kg. B) igual a 3 kg.

C) mayor a 3 kg, pero menor a 3,5 kg. D) igual a 3,5 kg.

P.6 Si m es un número entero que satisface la desigualdad $-2 < m + 5 < 2$, entonces, la cantidad de posibles valores de m es

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

P.7 Sea x un número real y sea $z = x(x+1)(x-1)$. Si $x \epsilon\, [0,1[$, ¿cuál de las siguientes condiciones se cumple para z?

A) Es estrictamente positivo. B) Es positivo en algunos casos y cero en otros.

C) Es estrictamente negativo. D) Es negativo en algunos casos y cero en otros.

P.8 Un conjunto de 8 datos está compuesto por los valores 0, 1 y 2. Este conjunto tiene como promedio 0,5. De acuerdo con la información anterior, con certeza, la cantidad de datos que toman el valor 0 es

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

e-ISSN 2386-7418

Procedimiento

Los problemas del instrumento fueron juzgados por tres jueces expertos, profesores de matemática con experiencia en el constructo de RC y en trabajos con la prueba de la que derivan este tipo de problemas. Los mismos fueron capacitados en los procesos de análisis asociados al RC. Realizaron primeramente un análisis individual de los problemas, y luego se reunieron para decidir grupalmente los procesos esperados en aquellos problemas en los que no hubo acuerdo en el análisis individual.

Posteriormente se aplicó una entrevista cognitiva, a cada estudiante, para conocer los razonamientos utilizados para resolver dichos problemas. Para ello, se convocó a cada uno de los participantes a una reunión de máximo 90 minutos, para resolver los problemas seleccionados bajo el protocolo de pensamiento en voz alta. El procedimiento consiste en que la persona debe comunicar en el momento y en voz alta a) todas las ideas que está pensando para resolver un problemas y b) la forma en que está resolviendo el problema. Durante la resolución de un problema, el entrevistador solo podía intervenir cuando la persona llevara aproximadamente 20 segundos en silencio, para solicitarle que indicara lo que estaba pensando. En este trabajo solamente se aplicó el reporte verbal concurrente, en el que el sujeto únicamente describe en el momento lo que va realizando.

Las entrevistas se aplicaron de forma virtual. Al inicio de la sesión se completó el consentimiento informado, avalado por el Comité Ético Científico de la UCR. Durante la resolución de las preguntas, los estudiantes enfocaron la cámara a sus hojas de trabajo en las cuales efectuaban sus resoluciones y tomaban notas.

El paso previo al análisis de los datos fue la transcripción de las entrevistas, realizada por asistentes de investigación con formación en matemática, lo cual permitió que comprendieran los audios apropiadamente. Además, la transcripción fue revisada por el entrevistador para garantizar la fidelidad de esta.

El primer paso del análisis fue definir los ejes temáticos de las entrevistas (Seid, 2016), los cuales fueron las soluciones a un problema particular. Luego, para cada problema, se realiza una codificación de los procedimientos de solución específicos realizados por cada estudiante. En esta etapa se etiquetan pasajes relevantes de las soluciones con palabras y frases, que luego se agrupan en categorías denominadas: procedimientos de solución. Esta etapa permitió determinar cuántos estudiantes utilizaban cada procedimiento en el problema específico. Posteriormente, se determina a cuál de los procesos de análisis establecidos corresponde cada procedimiento (cuando sea posible hacer la correspondencia). Esta metodología permitió

e-ISSN 2386-7418

determinar el porcentaje de estudiantes que utilizó cada proceso en un problema determinado. Además, analizar el porcentaje del estudiantado que utilizó el proceso predicho por los expertos. Las estadísticas descriptivas de este trabajo se utilizan para resumir las frecuencias de presentación de cada uno de los procedimientos de resolución y procesos de análisis observados en las actuaciones de los estudiantes, pues el foco son los procesos de resolución y de análisis.

Resultados

En respuesta al objetivo de conocer si los procesos de resolución ejecutados por los estudiantes en la PHC corresponden con los esperados, según el equipo de expertos. Identificamos los procedimientos utilizados en cada problema por cada estudiante, los cuales clasificamos en categorías y presentamos en este apartado con su concordancia con lo mencionado por los jueces.

Para los problemas P1 y P2 los jueces asignaron el proceso de generalización, debido a que para ellos el procedimiento esperado es que el estudiante determine el patrón de la secuencia y lo aplique para calcular el valor del término solicitado. En P1 los estudiantes presentaron tres procedimientos distintos para esta generalización, el primero consistió en (A) *generalización con casos auxiliares*, en el cual se realizaron algunos casos particulares, se nota un patrón y se generaliza. El segundo, consistió en (B) *generalización directa*, basada en observar únicamente los casos dados en busca de una regularidad y generalizar, sin necesidad de realizar más casos particulares. La población restante realizó (C) *combinación de procedimientos de generalizar y validar.* En este caso observaron los casos dados, notaron regularidades (paso previo a la generalización), pero no logran generalizar y optaron por analizar las opciones, lo cual presentó elementos de dos procesos: generalizar y validar, ya que se analiza la secuencia dada y se estudia el valor de verdad de las afirmaciones.

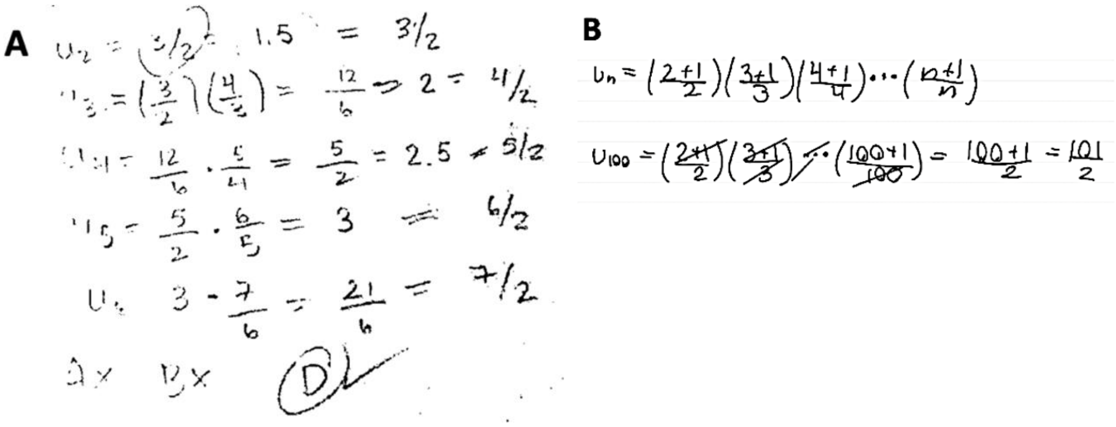
Entre las frases que definieron el procedimiento A estuvieron "vamos a hacer una más", "voy a hacer un poco, para notar el patrón". Mientras en la solución B estuvieron frases como "se van a cancelar el 1er numerador con el 2do denominador, el 2do numerador con el 3er denominador y así", sin necesidad de más casos particulares, lo cual permite asociar ambos razonamientos con el proceso de generalizar. En la Figura 1 se presentan ejemplos de los procedimientos A y B, el C no se representa puesto que el estudiante realiza el análisis mentalmente y no aporta evidencia escrita.

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

Figura 1

Procedimientos A y B asociados al primer problema de generalización



En el problema P2 la mayoría del estudiantado utilizó el proceso de generalizar, pero se identificaron tres procedimientos de resolución distintos, el primero es (A) *generalización directa*, observan los casos dados, identifican un patrón en la estructura geométrica y con esto generalizaron para determinar la estructura de la posición 15 y su área. El otro es (B) *generalización exhaustiva*, observan los casos dados, identifican un patrón en la secuencia numérica, y continúan calculándolo, uno por uno, hasta la posición 15. (C) La población restante intentó observar los casos dados e identificar alguna regularidad, pero no logró la generalización.

Algunas frases que definieron el procedimiento A fueron "se va a agregando una fila más", "en cada fila, de abajo hacia arriba, va disminuyendo un cuadrito", "siempre la fila de abajo va a ser el número más 1", mientras en el B algunas como "pasa de 3 a 6, de 6 a 10, del 10 al 15", "esto avanza en 3, luego suma 4, luego 5, …". Permiten diferenciar entre los procesos basados en estructura geométrica o en secuencias numéricas. La Figura 2 presenta ejemplos de los procedimientos señalados.

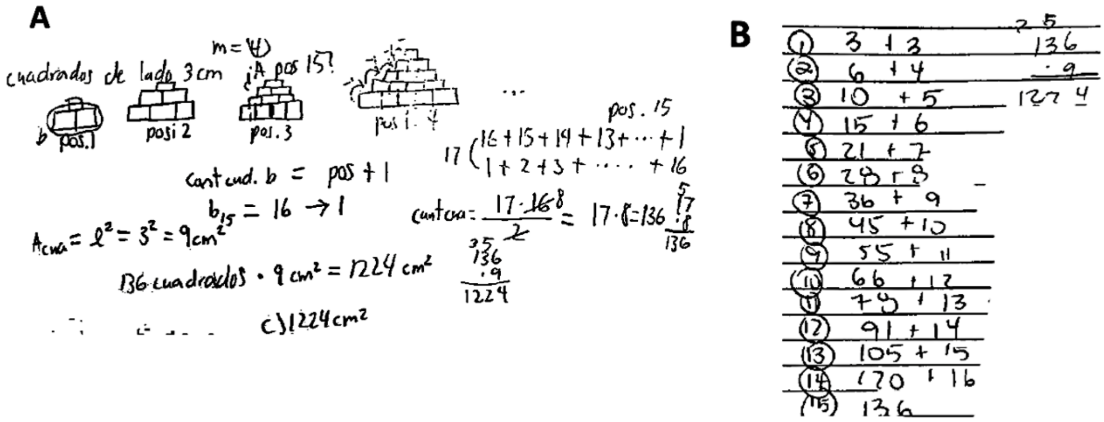
En los problemas asociados al proceso de validar, se presentó coincidencia entre lo planteado por los expertos y lo observado. Para P3 los expertos lo consideraron de validar debido a que esperan que el estudiante analice el valor de verdad de cada opción, no obstante, indicaron que podría haber elementos de otros procesos debido a la forma en que se utilice la información del enunciado. La mayoría del estudiantado recurrió a una *combinación de procedimientos de ejemplificar y validar* (Figura 3, A), pues se dan valores que cumplen las condiciones dadas y los utilizan para validar las alternativas. Otros utilizaron una *combinación de procedimientos de relacionar y validar* (Figura 3, B), pues extraen la información dada en el enunciado y validan con ella opción por opción. Ambos asociados al proceso de validar en

e-ISSN 2386-7418

conjunto con otro proceso. Los restantes utilizan *procedimientos de relacionar* (Figura 3, C), pues plantean representaciones para la información dada y las relacionan entre ellas, determinando directamente que $p \cdot m$ es múltiplo de 12.

Figura 2

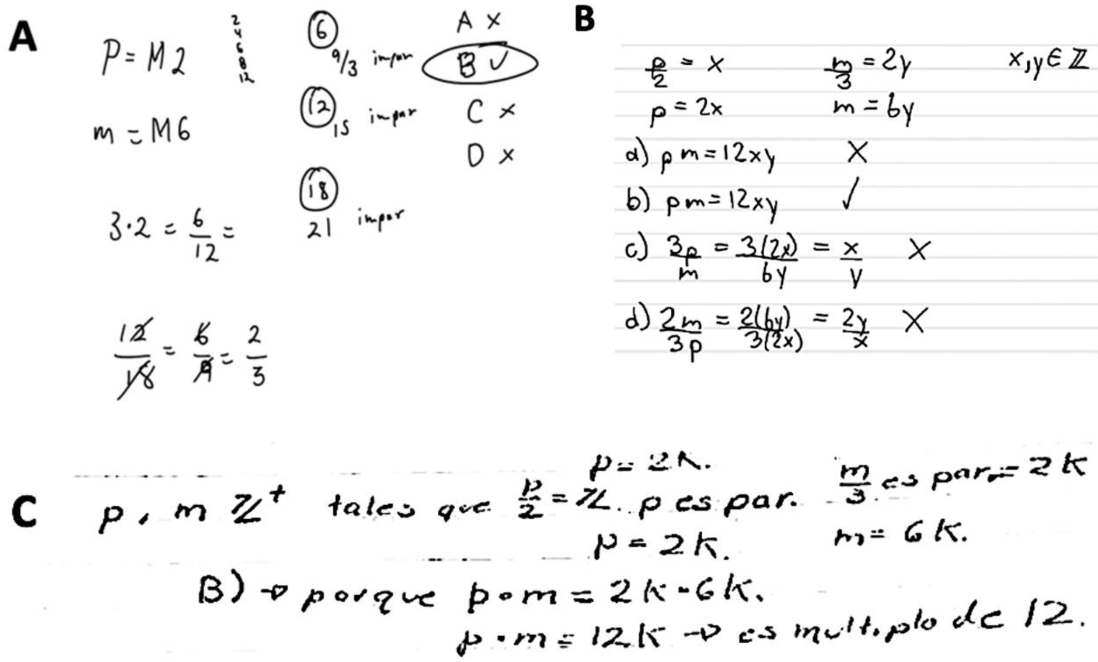
Procedimientos A y B asociados al segundo problema de generalización



Respecto al procedimiento A, los estudiantes mencionaron frases como “doy valores a *p* y *m* hasta que se descarten las opciones”, “si alguno de los casos no se cumple lo descarto”, y en relación con la solución B frases como “probar una por una”, las cuales permitieron asociar su razonamiento con validar. La Figura 3 presenta ejemplos de los procedimientos señalados.

Figura 3

Procedimientos A, B y C asociados al primer problema de validación



Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

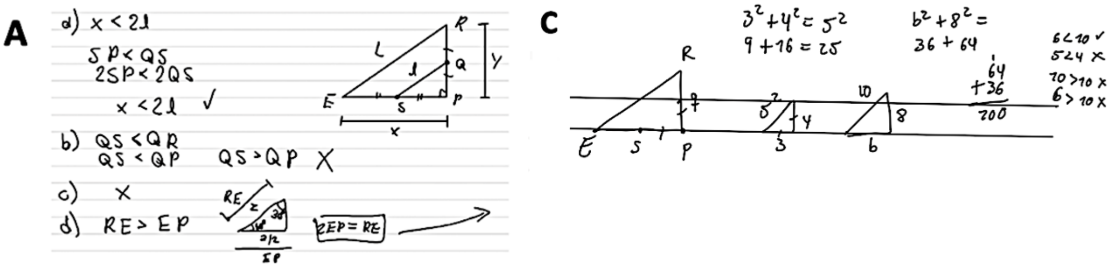
e-ISSN 2386-7418

Para el P4 los expertos indican el proceso de validar, dado que se debe analizar puntualmente el valor de verdad de cada opción. Todos los estudiantes utilizaron parcialmente el proceso de validar para resolver este problema, pues se concentraron en determinar la veracidad de las opciones de respuesta. Respecto a los procedimientos observados, la mitad usó (A) *procedimientos de relacionar y validar,* pues validaron cada una de las opciones estableciendo relaciones entre las medidas mediante cadenas de argumentos; otros usaron (B) *procedimientos de relacionar/ejemplificar y validar*, pues validaron las opciones estableciendo relaciones entre las medidas mediante una cadena de argumentos o utilizaron la ejemplificación en algunas de las alternativas para determinar su veracidad, ya sea mediante el análisis de casos o la búsqueda de contraejemplos. Los restantes recurrieron a (C) *procedimientos de ejemplificar y validar*, dieron valores a los lados de los triángulos y con ellos verificaron las desigualdades dadas en las opciones.

En relación con la solución A (Figura 4), los estudiantes mencionaron frases como “no se cumple porque son iguales”, “la hipotenusa siempre va a ser más grande que el cateto” correspondiente al proceso de relacionar. En la solución C mencionaron frases como “ponerles valores” correspondiente a ejemplificar, mientras en la B mencionaron ambos tipos de frases pues echan mano de ambos procesos para validar.

Figura 4

Procedimientos A y C asociados al segundo problema de validación



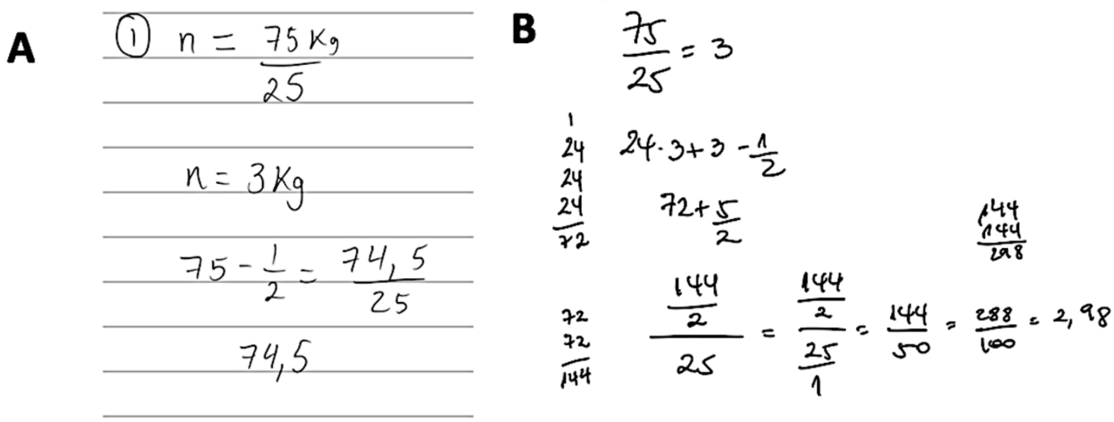
Para el P5 los expertos señalan relacionar debido a que la solución se basa en el planteamiento y análisis de la fórmula del nuevo promedio en contraste con el promedio inicial. El procedimiento que más utilizaron los y las estudiantes fue (A) *plantear relaciones y hacer inferencias*, este consistió en calcular el promedio inicial, para luego deducir que, con el cambio, el otro promedio debe disminuir, sin calcularlo de forma exacta. Algunos utilizaron la variación en la fórmula del promedio para realizar sus inferencias mientras otros utilizaron las opciones de respuesta. El otro procedimiento fue (B) *plantear e integrar relaciones*, ya que determinaron los promedios antes y después del cambio en el peso y los compararon.

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1),38-60
e-ISSN 2386-7418

El procedimiento A fue determinado por frases como “si divido 74,5 entre las 25 cajas, ese tiene que ser el nuevo promedio”, “como ahora es menor a 75, no puede dar 3”. Por su parte, el procedimiento B se evidenció en frases como “voy a dividir eso entre las 25 cajas, cada caja pesa 3”, “es como 2,98 entonces es menor”. Claves para asociar estos razonamientos con el proceso de relacionar. La Figura 5 presenta ejemplos de los procedimientos señalados.

Figura 5

Procedimientos A y B asociados al primer problema de relacionar



Los expertos clasificaron el P6 en relacionar pues plantean que hay que establecer varias ecuaciones para obtener los valores de m. Al analizar los procedimientos de los estudiantes se determina que en las soluciones que se obtienen de procedimientos distintos a la aplicación de algoritmos específicos, el problema corresponde 100% al proceso de relacionar. Identificando tres procedimientos distintos que utilizaron los estudiantes para dar respuesta al problema.

El primero fue (A) *utilizar algoritmos específicos*, ya que resolvieron directamente la inecuación, para determinar los valores que la satisfacen; este es un procedimiento más memorístico que de razonamiento. El segundo procedimiento es (B) *plantear e integrar relaciones*¸ debido a que el estudiantado estableció varias relaciones de los posibles valores de m+5, para posteriormente determinar los valores de m. El tercer procedimiento consistió en (C) *plantear relaciones y hacer inferencias*, ya que realiza un procedimiento similar al B por medio de una cadena de argumentos, e infiere que no necesita determinar valores de m.

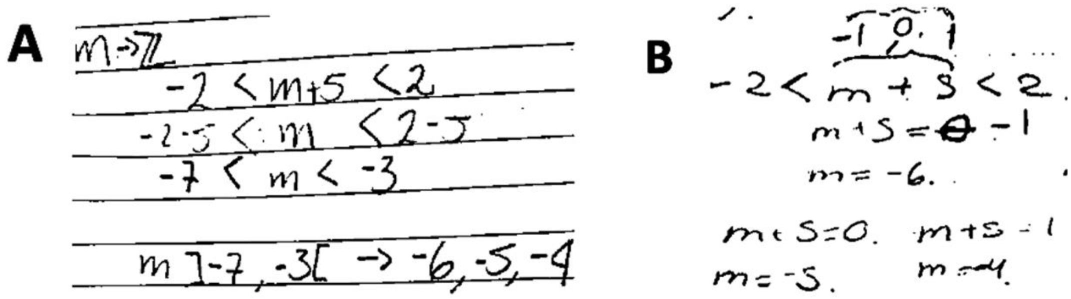
Con respecto al procedimiento A, los estudiantes mencionaron frases como “es mayor que -7 y es menor que -3”, “los valores que están ahí, enteros son -6, -5, -4”; en cuanto al procedimiento B, frases como “m+5 puede tomar valores desde el -1 hasta el 1” y, con respecto al procedimiento C frases como: “entre -2 y 2, está el -1, 0 y el 1, agarro números del centro, tendría 3 opciones”. La Figura 6 presenta dos ejemplos de los procedimientos señalados.

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

Figura 6

Procedimientos A y B asociados al segundo problema de relacionar



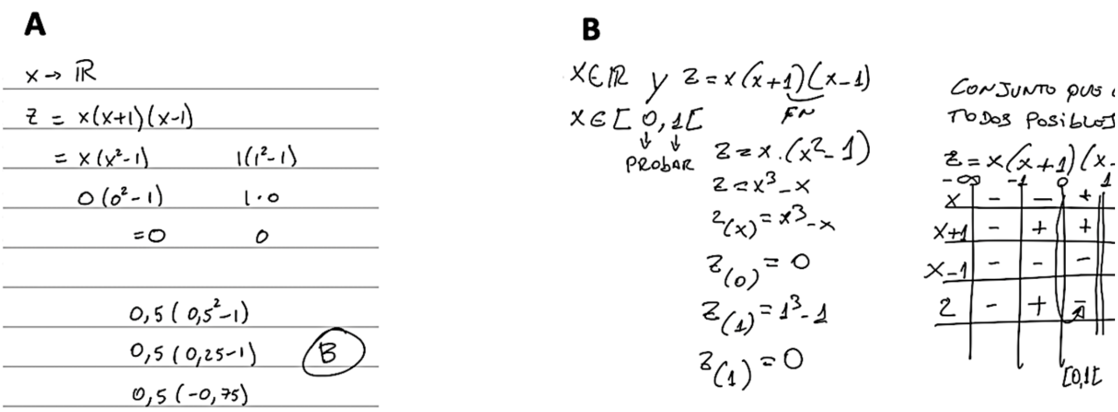
El último par de problemas corresponden a los planteados para el proceso de ejemplificar, estos no presentaron mucha coincidencia entre lo planteado y lo observado.

Los expertos consideran que P7 es de ejemplificar debido a que la búsqueda del conjunto es compleja, en comparación con analizar dos casos (el cero y un número positivo) y descartar opciones. El procedimiento utilizado por la mayoría del estudiantado fue (A) *plantear y analizar ejemplos*, en esta estrategia explícitamente se plantearon ejemplos apropiados y se realizaron inferencias a partir de su análisis. Los restantes optaron por (B) *utilizar algoritmos específicos*, ya que utilizan procedimientos matemáticos específicos para abordar el problema presentado.

En el procedimiento A, los estudiantes mencionaron frases como “un extremo es cero, pero tengo que saber si los valores son o para arriba o para abajo”, “intentar con un ½, …, va a ser negativo”, y con relación al B frases como “x-1 siempre va a ser negativo y los demás positivos”, “multiplicar negativo por positivo y positivo, da negativo”. La Figura 7 presenta ejemplos de los procedimientos señalados.

Figura 7

Procedimientos A y B asociados al primer problema de ejemplificar



Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1),38-60

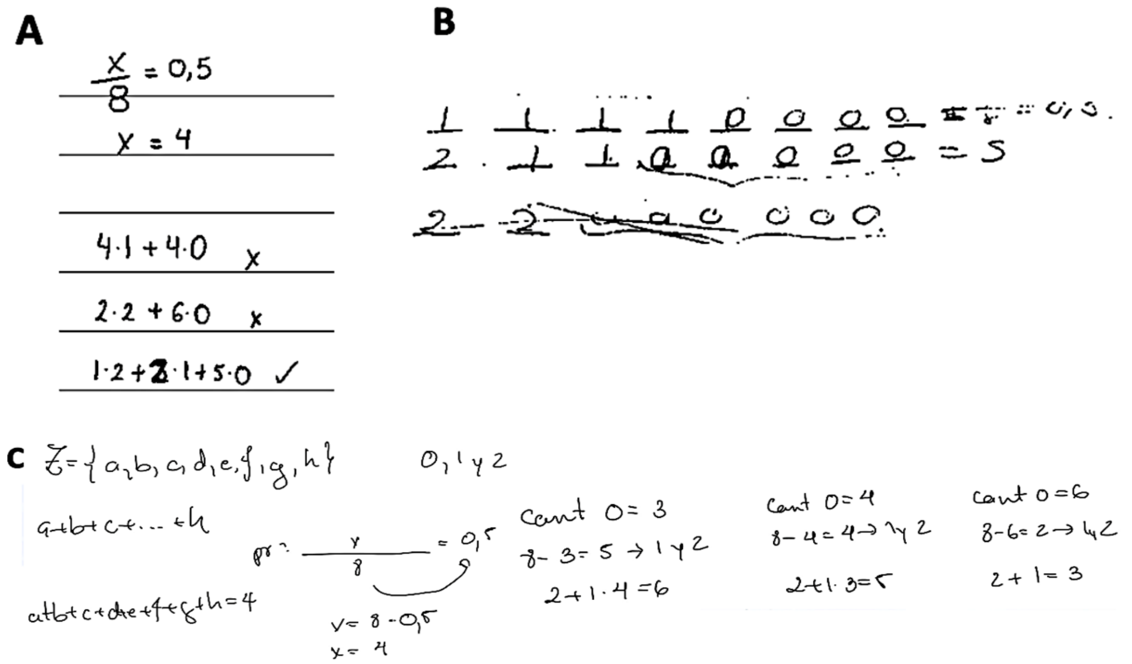
e-ISSN 2386-7418

Para el P8 los expertos indicaron que el proceso de resolución del problema es ejemplificar debido a que el estudiantado debe generar los ejemplos del conjunto en el que los valores del promedio sea 0,5. El procedimiento utilizado por la mayoría fue (A) *hacer inferencias de la relación y construir ejemplos*, ya que utilizaron la fórmula del promedio para obtener información útil para la estructura de los casos y, así, generar las soluciones posibles de una forma metódica. Otros utilizaron el procedimiento de (B) *construir y analizar ejemplos*, este consistió en crear ejemplos del conjunto con datos cuyos promedios satisfacen la condición establecida. Los restantes acuden a (C) *combinación de procedimientos de ejemplificar y validar*, ya que probaron en cada una de las alternativas construyendo ejemplos para determinar si se satisfacen las condiciones dadas.

Con relación al procedimiento A, los estudiantes mencionaron frases como “buscar un número, que dividido entre 8 de 0,5, es 4”, “tengo que llegar hasta 4, entonces, sería un 2 y dos 1 para que sume 4”, “los demás tienen que ser ceros”, que permiten asociar sus procedimientos al proceso de relacionar. En el B mencionaron frases correspondientes a ejemplificar como: “seria probar casos”, mientras en el C mencionaron frases como “en el caso que 0 sea 3, …”, “luego los unos y dos, serían un… no se podría”, “tiene que aparecer al menos una vez, entonces…”, que permiten asociar al proceso de validar. En la Figura 8 se presentan ejemplos de los procedimientos señalados.

Figura 8

Procedimientos A, B y C asociados al segundo problema de ejemplificar



Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

En respuesta al objetivo de analizar los problemas de RC planteados para asociarlos a los procesos de análisis requeridos. En cuanto a la asignación de los jueces expertos, se obtuvo que los procesos indicados por los expertos coincidieron con los establecidos en el diseño del instrumento para cada problema.

Se determina que en los problemas de generalizar el estudiantado efectivamente recurre al proceso señalado, como proceso de análisis principal. Para el segundo de los problemas, destaca que el primer procedimiento (A) que implica mayor abstracción y, por tanto, el esperado en los estudiantes, fue el que se presentó con mayor frecuencia en todos los subgrupos. Aunque, algunos no logran una generalización algebraica, sino que utilizan procedimientos aritméticos recursivos para llegar al valor buscado.

Para el primer problema de validar, el procedimiento (A), apoyado en la ejemplificación, que se considera menos elaborado, es el que se presenta en mayor medida. En oposición al procedimiento C, el más complejo de los tres, que se presenta únicamente en dos estudiantes. Un 5% de los estudiantes no logra plantear una estrategia para dar respuesta a este problema.

El segundo problema de validar fue en general el que tomó más tiempo a los estudiantes, en términos de ejecución, al haber una gran carga de interpretación. Se requería comprender los datos y realizar la representación de la figura, una vez esto se debía analizar las relaciones entre las medidas de los segmentos y posteriormente validar cada una de las opciones, cada una de las cuales requería un análisis bastante detallado. Aquellos alumnos que manejaban ciertas propiedades de los triángulos tenían ventaja y acudían al procedimiento A, que era más simplificado, pero requería mayor dominio y comprensión del contenido. El proceso B se apoyaba de la ejemplificación al haber carencias en el dominio del contenido. Mientras el C era una salida para quienes no manejaban las propiedades matemáticas requeridas.

En el primer problema de relacionar ambos procedimientos corresponden al proceso asignado y concuerda con los propuestos por expertos. Pero en el segundo problema, domina el procedimiento de uso de un algoritmo conocido, lo cual no corresponde con lo esperado.

Para el primer problema de ejemplificar, el 5% del estudiantado no logró resolverlo y solo un 60% del estudiantado utilizó un procedimiento cercano a la ejemplificación.

La Tabla 1 resume los porcentajes de jueces y estudiantes que utilizaron los procedimientos enunciados en cada problema. Se encontraron algunos elementos que pueden ser considerados para futuros estudios, pues en este caso se observan, pero no son representativas en una muestra tan pequeña. Estos corresponden a la comparación de los porcentajes de uso de los procedimientos propuestos, según género y centro de enseñanza de

e-ISSN 2386-7418

procedencia. Para esto se considera únicamente los procedimientos en el que el porcentaje de uso en un grupo hubiera diferido con el del otro grupo en un 40% o más (es decir, que el procedimiento fue utilizado en uno de los dos grupos por al menos 4 estudiantes más).

Tabla 1

Porcentaje de estudiantes que utilizó cada procedimiento, según el problema

	Expertos %	Total %	Mujeres %	Varones %	Privado %	Público %
Problema 1 de generalizar						
Generalización con casos auxiliares	0	55	70	40	60	50
Generalización directa	100	35	10 [c]	60 [c]	30	40
Combinación de procedimientos de generalizar y validar [a]	0	10	20	0	10	10
Problema 2 de generalizar						
Generalización directa	33	70	60	80	60	80
Generalización exhaustiva	67	20	30	10	30	10
Paso previo a generalización	0	10	10	10	10	10
Problema 1 de validar						
Combinación de procedimientos de relacionar y validar [a]	67	20	10	30	20	20
Combinación de procedimientos de ejemplificar y validar [a]	33	70	80	60	70	70
Procedimientos de relacionar [b]	0	10	10	10	10	10
Problema 2 de validar						
Combinación de procedimientos de relacionar y validar [a]	33	50	40	60	40	60
Combinación de procedimientos de ejemplificar y validar [a]	33	25	40	10	40	10
Combinación de procedimientos de relacionar, ejemplificar y validar [a]	0	20	10	30	20	20
Relacionar	33	0	0	0	0	0
Problema 1 de relacionar						
Plantear relaciones y hacer inferencias	33	70	70	70	80	60
Plantear e integrar relaciones	67	30	30	30	10	40
Problema 2 de relacionar						
Utilizar algoritmos específicos [b]	0	60	70	50	60	60
Plantear e integrar relaciones	50	35	30	40	30	40
Plantear relaciones y hacer inferencias	25	5	0	10	10	0
Ejemplificar	25	0	0	0	0	0
Problema 1 de ejemplificar						
Relacionar	33	0	0	0	0	0
Plantear y analizar ejemplos	67	60	60	60	70	50
Utilizar algoritmos específicos [b]	0	35	30	40	30	40
Problema 2 de ejemplificar						
Hacer inferencias de la relación y construir ejemplos [a]	33	70	70	70	90 [c]	50 [c]
Construir y analizar ejemplos	67	15	20	10	0	30
Combinación de procedimientos de ejemplificar y validar	0	15	10	20	10	20

[a] Procedimiento asociado al proceso que representa el problema según expertos, pero combinado con otro proceso. [b] Procedimiento no asociado al proceso que representa el problema según expertos. [c] Porcentajes de los grupos de una misma categoría cuyas diferencias fueron mayores o iguales a 40.

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

Con respecto al género, únicamente el problema 1 de generalizar presentó diferencias considerables en un procedimiento. Los varones utilizaron en mayor medida la generalización *directa que las mujeres* (60% contra 10%), para compensar esta situación las mujeres utilizaron otros como *generalización con casos auxiliares* y *combinación de procedimientos de generalizar y validar.*

En cuanto a la comparación por centro de enseñanza de procedencia se observa diferencias considerables el problema 2 de ejemplificar. El estudiantado procedente de centros privados utilizó en mayor medida *hacer inferencias y construir ejemplos* (90% contra 50%). En este problema se utilizaba ese procedimiento al deducir reglas de la condición dada (el promedio de 8 datos) antes de construir los ejemplos, lo cual permitía una construcción más eficiente.

Discusión y conclusiones

Esta investigación permitió explorar la coincidencia de los procesos de análisis utilizados por la mayoría del estudiantado al resolver problemas de RC en contraste con los asignados por expertos. Este trabajo es de suma importancia para los departamentos de evaluación de procesos de razonamiento, ya que muchas veces se plantean una distribución de procesos en las evaluaciones, pero en la realidad el estudiantado utiliza formas alternas de pensamiento.

Destaca la precisión de los expertos al determinar el proceso de solución que utilizaría la mayoría del estudiantado. Los procedimientos observados en los problemas correspondieron en su mayoría con los predichos por los expertos. En conclusión, la definición de los procesos fue apropiada para predecir los procesos de solución del estudiantado.

Solo en el P6 el procedimiento más utilizado no correspondió al esperado, pues tuvo como procedimiento dominante el uso de un algoritmo conocido, lo que no correspondía con lo estipulado. Esta situación se debió a que los expertos no consideraron que el estudiantado conocía un algoritmo específico para resolver el problema. Esta situación debe ser analizada con cautela por el equipo constructor de la PHC, debido a que una parte considerable del estudiantado podría estar resolviendo un problema sin utilizar el RC, contrario al objetivo de la prueba. A partir de lo anterior, se recomienda estudiar si los problemas representan problemas clásicos de algún contenido, para evitar incluir aquellos que no movilicen el RC sino solo la reproducción de algún algoritmo conocido.

Se destaca que los expertos no plantearon la posibilidad de combinación de procesos en resolución a un problema, aspecto encontrado en los problemas de validar y en un ítem de ejemplificar. En estos problemas, los expertos predijeron correctamente un proceso, pero no

e-ISSN 2386-7418

consideraron otro inmerso. No obstante, a los expertos se les solicitó que seleccionaran el proceso más relevante en los problemas, lo cual pudo desincentivarlos a proponer combinaciones de procesos.

Otro punto importante corresponde a la caracterización de los procesos dada por los procedimientos observados en la codificación de las entrevistas. Respecto al proceso de generalizar, se obtuvo que fue ejecutado con tres procedimientos distintos: generalización directa, generalización con casos auxiliares y generalización exhaustiva. La diferencia entre los tres procedimientos es la cantidad de casos que utilizan para obtener el término de interés y la forma en que se construye la regla de formación de la sucesión. En el primer procedimiento basta con los casos proporcionados en el ítem para crear la regla de formación de la sucesión; en el segundo, el estudiantado prefiere crear casos adicionales siguiendo la secuencia, hasta descubrir la regla de formación; en el tercero, se calculan todos los casos previos al término de interés y no se descubre la regla de formación. El último es menos eficiente, pero es una forma válida para obtener la solución del problema.

En los problemas de validación se observa que los procedimientos asociados demandan el análisis del valor de verdad de las proposiciones (definición del proceso de validar) y de algún elemento de los otros tres procesos generales estudiados. En consecuencia, se concluye que por lo general este proceso está enlazado con otro(s) proceso(s), por tanto, los problemas asociados a este requieren ser categorizados como procesos mixtos. Otro punto importante, respecto a validar, es que una fracción del estudiantado lo utiliza cuando no logra resolver un problema de manera directa. En estos casos, recurren a las opciones de los problemas, plantean enunciados y tratan de analizar el valor de verdad. Este procedimiento se observó en un ítem de generalizar y en otro de ejemplificar. Mostrando que en los problemas de opción múltiple es posible que algunos estudiantes utilicen el proceso de validar, a pesar de que el proceso esperado sea otro.

En cuanto a relacionar, hubo dos procedimientos asociados: plantear relaciones y hacer inferencias y plantear e integrar relaciones. Estos indicaron que el proceso relacionar se caracterizó por la necesidad de plantear relaciones. Luego, se pueden abordar los problemas por medio de hacer inferencias basadas en conocimiento matemático o la integración de las relaciones hasta llegar a la solución buscada. El uso de inferencias se vuelve útil cuando se busca una propiedad de la respuesta; en los casos en que se busca una solución numérica específica, el uso de inferencias puede ser insuficiente.

Por último, el proceso de ejemplificar se trabajó con dos procedimientos propios: plantear y analizar ejemplos y construir y analizar ejemplos. La diferencia entre ambos correspondió a la

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

complejidad en los casos seleccionados, en el primer procedimiento se requiere únicamente sustituir valores en una fórmula, mientras que, en el segundo, hay que elaborar un caso que satisfaga un conjunto de condiciones. Posterior a la selección de los ejemplos, se debe realizar un análisis de estos que permita llegar a la solución del problema. Hubo un procedimiento en un ítem de ejemplificación que tuvo elementos de los procesos de relacionar y ejemplificar: hacer inferencias de la relación y construir ejemplos. Este procedimiento permitió llegar a la solución del problema de una forma más eficiente. Por tanto, en el ítem, que se presentó este procedimiento, se decidió plantear como un ítem con procesos mixtos.

El último punto es sobre las diferencias en los procedimientos entre grupos de población. Con respecto a las diferencias por dependencia del centro de enseñanza de procedencia, los estudiantes provenientes de centro privado utilizaron en mayor porcentaje un procedimiento más eficiente, que demandaba el uso de inferencias a partir de una relación para la construcción de ejemplos. Este procedimiento pudo ser más utilizado por esta población debido a que está más acostumbrada a realizar análisis de expresiones matemáticas. Además, este procedimiento demanda hacer una valoración general del problema antes de la ejecución de la solución, lo cual es una parte de la resolución de problemas no rutinarios; pero esto tipo de problemas generalmente son poco tratados en los centros públicos. Lo cual, puede asociarse al uso de heurísticas, por medio de las cuales los estudiantes ejecutan una serie de atajos para identificar respuestas plausibles en lugar de aplicar algoritmos que puede que en su momento no dispongan, dentro de sus posibilidades, los algoritmos de forma completa para dar respuesta a ciertos planteamientos (Roberts, 2008). Esta situación advierte que el RC puede estar siendo subestimado en algunos colegios, debido al alto énfasis en la enseñanza de algoritmos.

Por otro lado, se observó que los varones realizaron con más frecuencia el procedimiento de generalización directa que las mujeres. En este punto se puede mencionar que la autoeficacia en las mujeres suele presentar promedios más bajos que en los varones, debido a factores variados como se menciona en Montero-Rojas et al. (2021) “los estereotipos culturales pueden afectar la autoeficacia de las mujeres en matemática a través de las actitudes mantenidas por importantes agentes de socialización como pares, padres y madres, y profesores o profesoras” (p.5), lo cual puede repercutir en que presenten dudas para inferir la fórmula de formación de la secuencia con unos pocos casos. Esta situación refleja como los factores educativos pueden repercutir en la selección de procedimientos de solución.

En conclusión, este trabajo presenta una metodología para evaluar los criterios de un grupo de expertos sobre los procesos de razonamiento subyacentes a la mayoría del estudiantado con

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1),38-60

e-ISSN 2386-7418

niveles altos de habilidad. Esta metodología permitió mejorar la comprensión de los procesos y la generación de nuevos puntos para ser tomados en cuenta en próximos juzgamientos. Como posibles vías de continuidad, se plantea a futuro replicar este estudio con una muestra aleatoria, para determinar si se mantienen las diferencias por género y centro de enseñanza.

Referencias

AERA (American Educational Research Association), APA (American Psychological Association) & NCME (National Council on Measurement in Education) (2014). *Standards for educational and psychological testing.* American Educational Research Association.

BRITO, Nancy (2014). *La experiencia del aprendizaje mediado en el desarrollo de habilidades para el razonamiento matemático, verbal, abstracto y cuantitativo. Estudio de caso facultad de artes y facultad de ingeniería civil de la universidad de Cuenca* [Tesis de Maestría, Universidad de Cuenca, Ecuador]. http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/23031

BRIZUELA, Armel; JIMENEZ, Karol; PÉREZ, Nelson; & ROJAS, Guaner (2016). Autorreportes verbales en voz alta para la identificación de procesos de razonamiento en pruebas estandarizadas. *Revista Costarricense de Psicología*, *35*(1), 17-30. https://doi.org/10.22544/rcps.v35i01.02

CABASSUT, Richard (2005*). Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne* [Proof, reasoning and validation in mathematics secondary teaching in France and Germany] [Tesis doctoral, Université Paris Diderot, France]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716

CAÑADAS, María Consuelo; DEULOFEU, Jordi; FIGUEIRAS, Lourdes; REID, David; & YEVDOKIMOV, Oleksiy (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55–72. http://hdl.handle.net/10481/5521

DWYER, Carol; GALLAGHER, Ann; LEVIN, Jutta; & MORLEY, Mary (2003). *What is Quantitative Reasoning? Defining the Construct for Assessment Purposes.* Research Reports. Educational Testing Service. Princeton. http://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2003.tb01922.x

ERICCSON, K. Anders; & SIMON. Herbert A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Reports, 87*(3), 215–250. https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.3.215

JEANNOTTE, Doris; & KIERAN, Carolyn (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 96, 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 2023, 10(1), 38-60

e-ISSN 2386-7418

LITHNER, Johan (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67(*3*), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

MARRADES, Ramón; & GUTIÉRREZ, Ángel (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 87-125. https://www.jstor.org/stable/3483206

MASON, John (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. Opening address. QCA Conference, UK.

MAYES, Robert; PETERSON, Franziska; & BONILLA, Rachel (2013). Quantitative Reasoning Learning Progressions for Environmental Science: Development a Framework. *Numeracy.* 6 (*4*)1-28. https://doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.4

MONTERO-ROJAS, Eiliana; MOREIRA-MORA, Tania; ZAMORA-ARAYA, José Andrey; & SMITH-CASTRO, Vanessa (2021). Una nueva mirada teórica y metodológica a diferencias de género en pruebas de matemática: Razonamiento, actitudes psicosociales y modelos multinivel. *Educare,* 25(*1*), 1-21. http://doi.org/10.15359/ree.25-1.8

MUZANI, Muhammad; JUNIATI, Dwi; & SISWONO, Eko (2018). Exploration of student's quantitative reasoning in solving mathematical problem: case study of field-dependent cognitive style. *Journal of Physics: Conference series,* 1157(*3*), 1-6. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/3/032093

PÓLYA, George (1968). *Mathematics and plausible reasoning* (2nd ed.). Princeton University Press.

RHODES, Terrel (2010). *Assessing Outcomes and Improving Achievement: Tips and tools for Using Rubrics.* Washington, DC: Association of American Colleges and Universities.

ROBERTS, Maxwell (2008). Heuristics and reasoning: Making deduction simple. En J.P., Leighton, & R.J., Sternberg (Eds.). *The nature of reasoning* (pp. 234-272). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511818714

SEID, Gonzalo (2016). *Procedimientos para el análisis cualitativo de entrevistas. Una propuesta didáctica.* Actas del V Encuentro Latinoamericano de Metodología de las Ciencias Sociales (ELMeCS). Mendoza, Argentina. https://repositoriosdigitales.mincyt.gob.ar/vufind/Record/MemAca_9c8b3bd31e0b9d5fa4e26bd71f70fc91

SMITH-CASTRO, Vanessa; & MOLINA, Mauricio (2011). La entrevista cognitiva: Guía para su aplicación en la evaluación y mejoramiento de instrumentos de papel y lápiz. *Cuadernos metodológicos 5*(1), 1-114. Instituto de investigaciones Psicológicas, Universidad de

e-ISSN 2386-7418

Costa Rica. https://iip.ucr.ac.cr/es/publicaciones/publicacion-de-investigador/la-entrevista-cognitiva-guia-para-su-aplicacion-en-la-0

STYLIANIDES, Gabriel (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(*1*), 9–16. https://www.jstor.org/stable/40248592

THOMPSON, Patrick (2010). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En Scott A. Chamberlin, Larry L. Hatfield, & Shashidhar Belbase (Eds). *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education.* College of Education, University of Wyoming.

VÍQUEZ, Leiner; MORA, Mónica; ORDÓÑEZ, Graciela; & ROJAS, Luis (2021). *Introducción a la prueba de habilidades cuantitativas.* Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Fecha de recepción: 27 de noviembre de 2022.
Fecha de revisión: 23 de mayo de 2023.
Fecha de aceptación: 27 de mayo de 2023.
Fecha de publicación: 1 de julio de 2023.

e-ISSN 2386-7418